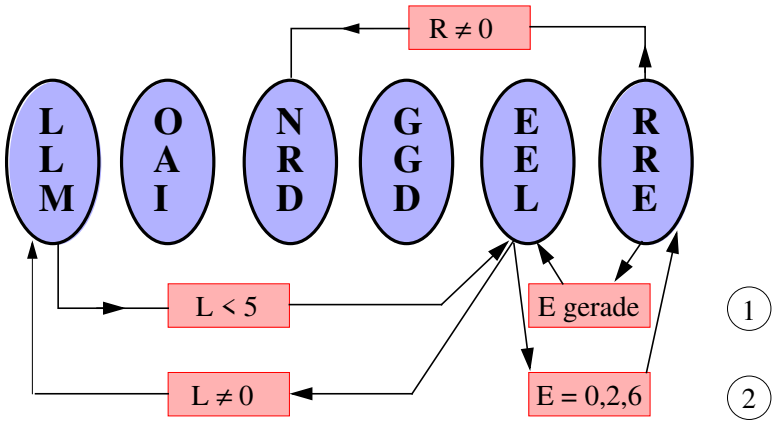
Ein weiteres Beispielproblem: Paralleles Lösen von "Zahlenrätseln"

```
 LONGER          207563
+LARGER    ⟶   +283563
--------        ------
 MIDDLE          491126
```

Pro Spalte ein Prozess

- Reaktives Verhalten: Auslösen atomarer Aktionen
- Propagieren neuer Erkenntnisse (= Einschränkungen)
  ("parallele Constraint-Propagation")



Endergebnis:

$1 \le L \le 4$
$M \ge 2$
R = 1,3,5,6,8
E = 0,2,6
sonst keine Einschränkung

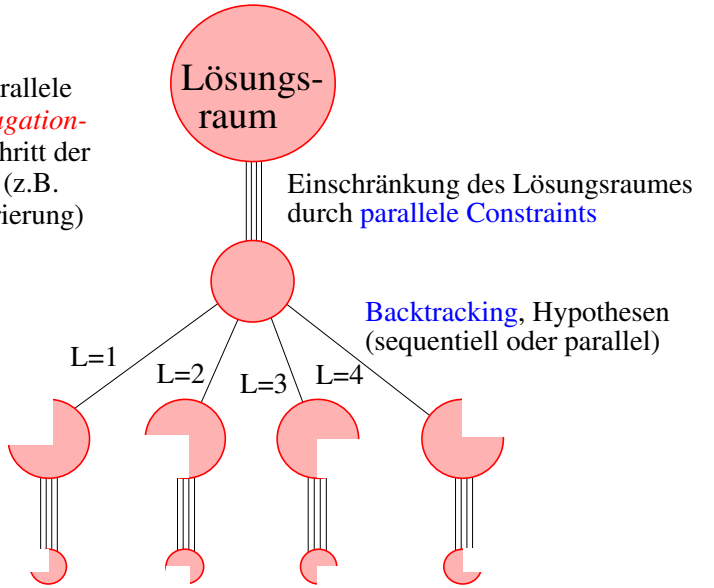
Probleme:

1) Keine eindeutige Lösung
   --> Backtrack-Algorithmus
2) Entdeckung der "Stagnation"?
   (Ende der Parallelphase)

Offensichtlich *gleiches Schema* wie ggT-Berechnung!

Der aufgesetzte Backtrack-Algorithmus

Abwechselnd: Parallele *Constraint-Propagation-Phase* und ein Schritt der *Backtrack-Phase* (z.B. Hypothesengenerierung)



- Hypothese = beliebige Menge von Constraints
  (von einem "Orakel" statt von einer Spalte)

- Einheit, die die Hypothesen generiert und verwaltet, muss die Terminierung einer Constraint-Phase feststellen können
  - wie würde man hier die Terminierung zweckmässigerweise definieren?
  - problembezogen wie bei ggT ("alle Werte identisch") hier nicht einfach
  - "alle passiv und keine sinnvolle Nachricht mehr unterwegs"?

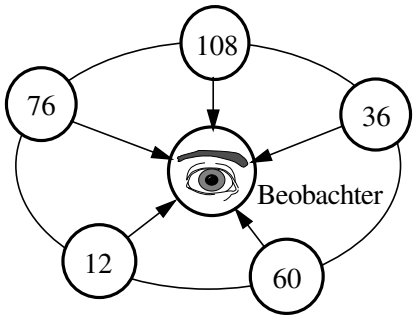
Bemerkungen:

- nicht unbedingt beste Parallelisierungsstrategie!
- Problem ist (in Verallgemeinerung) NP-vollständig

Übungen (1) zur Vorlesung "Verteilte Algorithmen"...

a) Man zeichne Raum-Zeit-Diagramme für verschiedene Abläufe des verteilten ggT-Algorithmus

b) Wie kann man beweisen, dass für *jeden* denkbaren Ablauf das Endergebnis stets der ggT ist?



c) Bleibt der Algorithmus (und/oder der Beweis) korrekt, wenn im Algorithmus $y<M_i$ durch $y \leq M_i$ ersetzt wird?

Verhaltensbeschreibung eines Prozesses P_i:

```
{Eine Nachricht <y> ist eingetroffen}
if y < M_i then
   M_i := mod(M_i-1,y)+1;
   send <M_i> to all neighbours;
fi
```


...Übungen (1)

d) Man vergleiche die verteilte Berechnung des ggT-Algorithmus für zwei Zahlen mit dem üblichen sequentiellen ggT-Algorithmus für zwei Zahlen

e) Genügt es auch, nur in Uhrzeigerrichtung eine Nachricht zu senden (anstatt an beide Nachbarn)?

f) Kann statt des Ringes eine andere Topologie verwendet werden? Welche?

g) Formalisieren Sie für Zeitdiagramme den Begriff (potentiell, indirekt) "kausal abhängig" als Halbordnung über "Ereignissen"

h) Wie kann man erreichen, dass ein ggT-Beobachter (der über jede Wertänderung eines Prozesse informiert wird) eine "kausaltreue" Beobachtung macht?

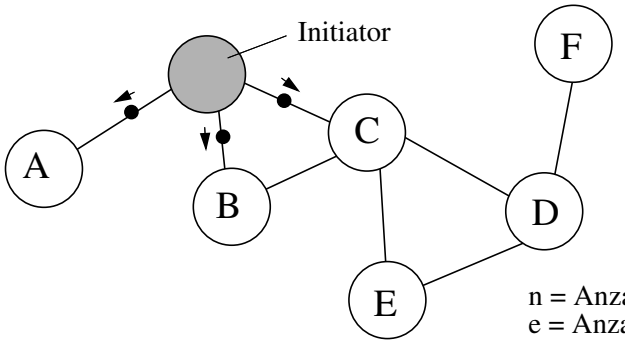
i) Beobachtungen sind eine lineare Ordnung von (beobachteten) Ereignissen. In welcher Beziehung steht die oben erwähnte Halbordnung zu dieser linearen Ordnung? Können Sie eine Vermutung darüber anstellen, was der Schnitt aller möglichen kausaltreuen Beobachtungen einer verteilten Berechnung aussagt?

j) Wie kann der Beobachter die Terminierung erkennen?

Flooding, Echo-Algorithmus, Broadcast

Informationsverteilung durch “Fluten”

“flooding”



n = Anzahl der Knoten
e = Anzahl der Kanten

- Voraussetzung: zusammenhängende Topologie
- Prinzip: jeder erzählt *neues* Gerücht allen anderen Freunden
- Kein Routing etc. notwendig

wieder das gleiche Prinzip wie beim ggT und beim Zahlenrätsel!

- Wieviele Nachrichten werden versendet?
  - jeder Knoten sendet über alle seine inzidenten Kanten (--> 2e)
  - jedoch nicht über seine Aktivierungskante zurück (--> -n)
  - Ausnahme: Initiator (--> +1)

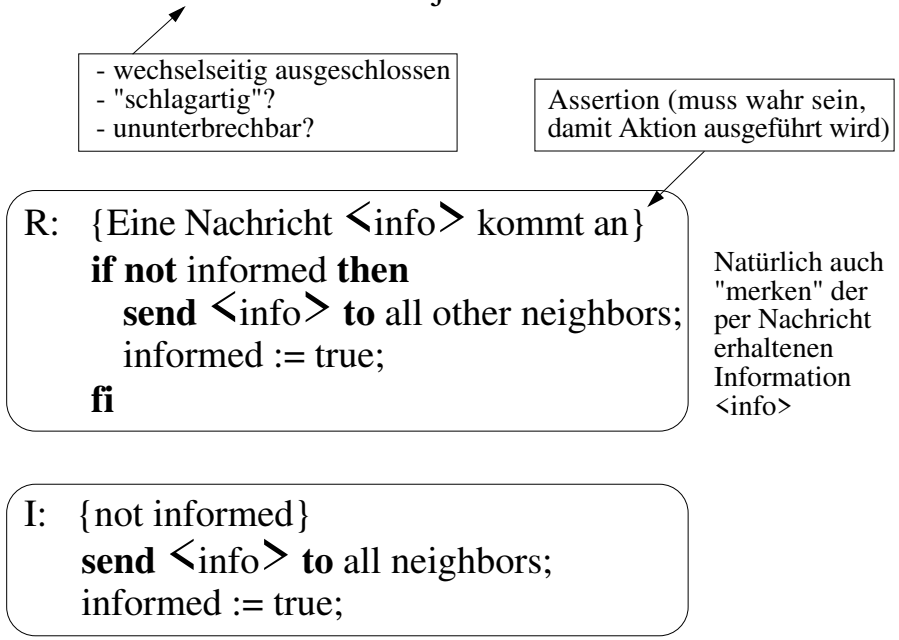
  ==> *Also*: 2e - n + 1

- Frage: Wie *Terminierung* feststellen?

  d.h.: wie erfährt der Sender (= Initiator), wann alle erreicht wurden?
  (das ist für “sicheren” oder “synchronen” Broadcast notwendig)

Flooding-Algorithmus - eine etwas formalere Spezifikation

- Zwei *atomare Aktionen* für jeden Prozess:



- initial sei informed=false
- Aktion R wird nur bei Erhalt einer Nachricht ausgeführt
  - "message driven"
- Aktion I wird vom Initiator *spontan* ausgeführt
  - darf es mehrere *konkurrente* Initiatoren geben?

Terminierungserkennung von Flooding

1) Jeder Prozess informiert (ggf. indirekt) den Initiator (oder einen Beobachter) per *Kontrollnachricht*, wenn er eine *Basisnachricht* erhält; Initiator zählt bis 2e-n+1
   - Nachteile?
     - n und e müssen dem Initiator bekannt sein
     - indirektes Informieren kostet ggf. viele Einzelnachrichten
   - Nachrichtenkomplexität?
   - Variante: Prozess sendet Kontrollnachricht, wenn er *erstmalig* eine Basisnachricht erhält; Initiator zählt bis n-1
     - n muss dem Initiator bekannt sein
     - Terminierung in dem Sinne, dass alle informiert sind - es können dann aber noch (an sich nutzlose) Basisnachrichten unterwegs sein

2) *Überlagerung* eines geeigneten Kontrollalgorithmus, der die Berechnung des Flooding-Verfahrens beobachtet und die Terminierung meldet
   - später mehr zu überlagerten Terminierungserkennungsverfahren

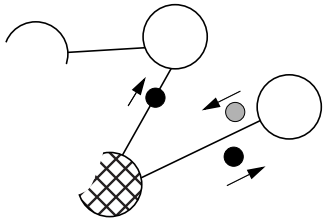
3) *Bestätigungsnachrichten* (acknowledgements)
   - direktes Bestätigen einer Nachricht funktioniert nicht
   - indirekte Bestätigungsnachrichten: ein Knoten sendet erst dann ein ack, wenn er selbst für alle seine Nachrichten acks erhalten hat
   - klappt diese Idee? auch wenn der Graph Zyklen enthält? wieso?

Flooding mit Quittungsmeldungen

(Originalversion des *Echo-Algorithmus* von Chang '82)

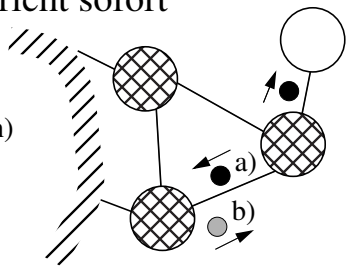
Prinzip: Ein Prozess versendet eine Quittung für eine empfangene Nachricht erst dann, wenn er für alle von ihm selbst versendeten Nachrichten Quittungen erhalten hat

- Ein Knoten mit Grad 1 ("Blatt") sendet sofort eine Quittung zurück



Nachricht des zugrundeliegenden (Flooding)-Algorithmus

- Ein Knoten, der bereits eine Basisnachricht erhalten hat, quittiert jede weitere Basisnachricht sofort
  - *Prinzip*: "bin schon informiert"
  - *Wirkung*: Zyklen werden aufgebrochen (als wäre die Kante gar nicht vorhanden)
  - *Konsequenz*: es entsteht ein Baum



- Terminiert, wenn Initiator alle Quittungen erhalten hat

- Wieviele Quittungen / Nachrichten insgesamt?

Der Echo-Algorithmus

(PIF-Variante von A. Segal, 1983)

Propagation of Information with Feedback

- Ähnliches Verfahren 1980 von Dijkstra/Scholten: "Diffusing Computations"

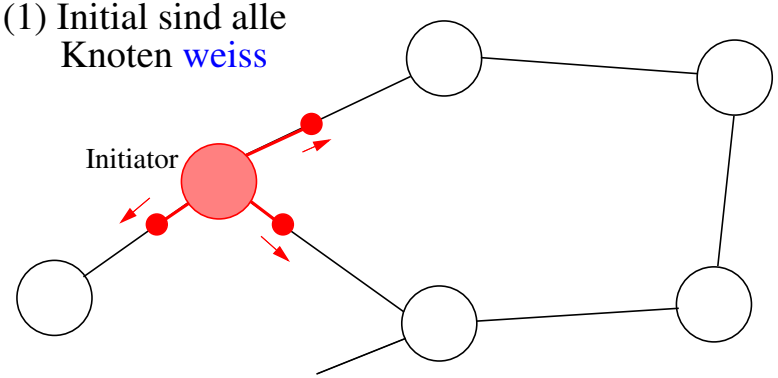
Ausgehend von einem einzigen Initiator:

- Paralleles *Traversieren* eines bel. (zusammenhängenden ungerichteten) Graphen mit 2e Nachrichten
- Terminierung klar durch "Vollzugsmeldung"
- Idee: *Indirektes* acknowledge
- Hinwelle durch "*Explorer*": Verteilen von Information
- Rückwelle durch "*Echos*": Einsammeln einer verteilten Information
- Aufbau eines *spannenden Baumes* ("Echo Kanten": jeder Knoten sendet genau ein Echo)

Paralleler *Wellenalgorithmus*:

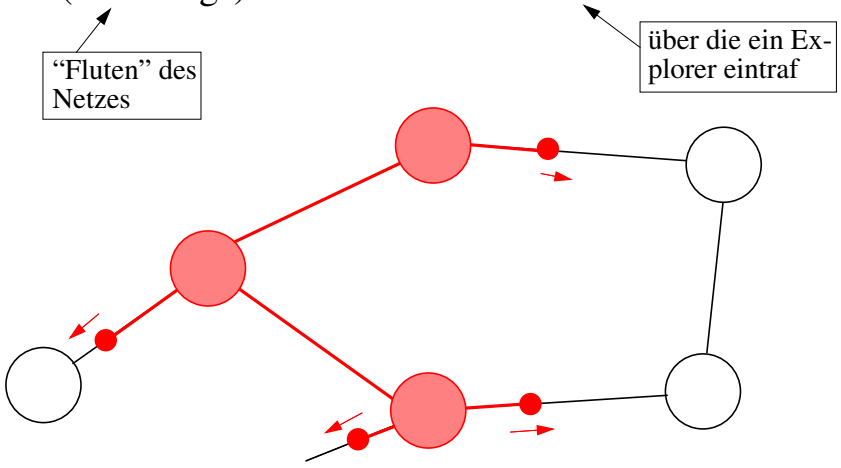
- virtueller broadcast
- *Basisalgorithmus* für andere Verfahren ("underlying algorithm"; "superposition")

(1) Initial sind alle Knoten weiss

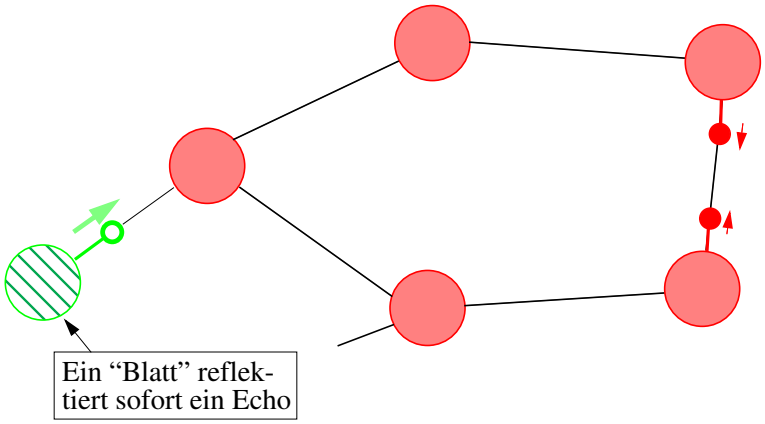


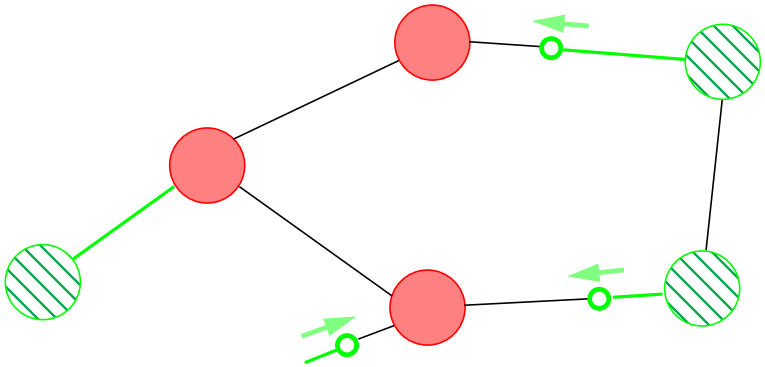
- Der (eindeutige) Initiator wird rot und sendet (rote) *Explorer* über alle seine Kanten

(2) Ein weisser Knoten, der einen Explorer bekommt, sendet Explorer über alle seine anderen Kanten ("flooding") und merkt sich die "erste" Kante



(3) Ein (roter) Knoten, der über alle seine Kanten einen Explorer *oder* ein Echo erhalten hat, wird grün und sendet ein (grünes) *Echo* über seine "erste" Kante

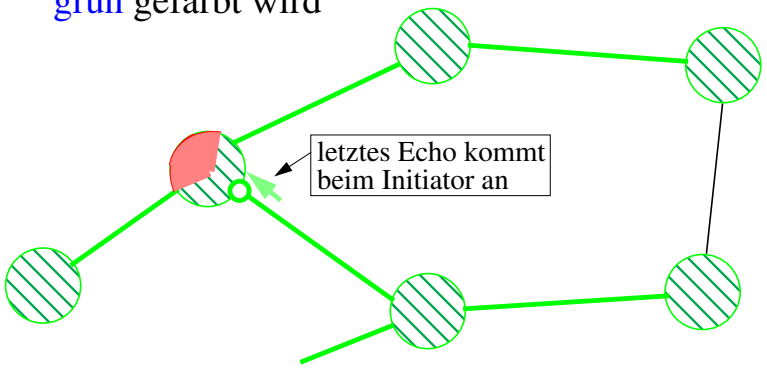




Beachte: *Atomare Aktionen* --> Explorer können sich höchstens auf Kanten begegnen, nicht aber bei Knoten!

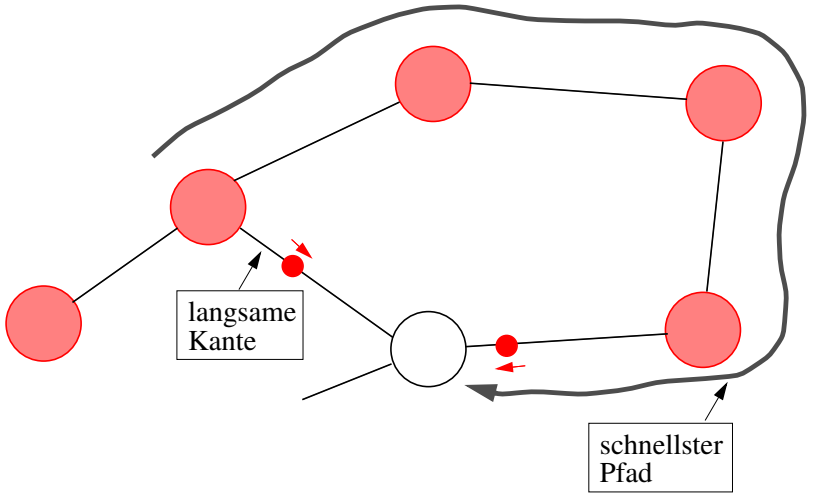
Auf einer Kante, wo sich zwei Explorer begegnen, wird der Zyklus aufgebrochen

(4) Das Verfahren ist beendet, wenn der Initiator grün gefärbt wird

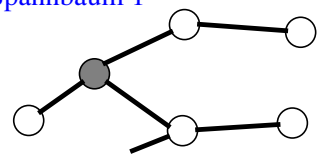


- Grüne Kanten bilden einen *Spannbaum*
  - alle Knoten bis auf den Initiator haben eine "erste" Kante
  - “grüner Graph” ist zusammenhängend
- Über jede Kante laufen genau 2 Nachrichten:
  - entweder ein Explorer und ein gegenläufiges Echo, oder zwei Explorer, die sich begegnen --> Nachrichtenkomplexität = 2e
- Verfahren ist *schnell*: parallel und "bester" (?) Baum
- Ereignis "rot werden" in jedem Prozess definiert eine Welle (*Hinwelle*)
- Ereignis "grün werden" in jedem Prozess --> *Rückwelle*
- Es darf nicht mehr als einen Initiator geben:
  - was geschieht sonst?
  - wie kann man dem Problem mehrerer Initiatoren begegnen?

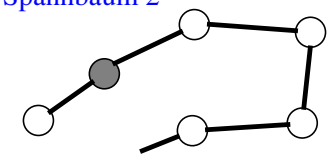
Echo-Algorithmus ist *nicht-deterministisch*, es können (je nach Geschwindigkeit einer "Leitung") *verschiedene* Spannbäume entstehen!



Spannbaum 1



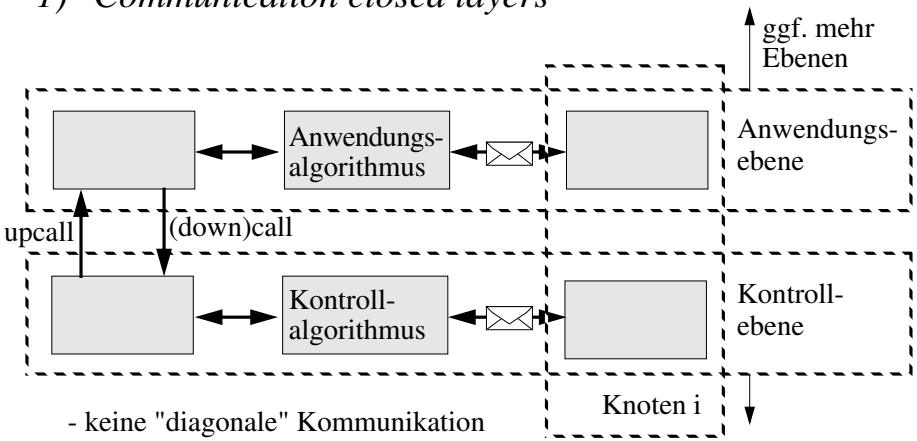
Spannbaum 2



- Inwiefern ist die PIF-Variante besser als die Originalversion?
  - Nachrichtenkomplexität
  - Einfachheit / Eleganz

Überlagerung ("Superposition")

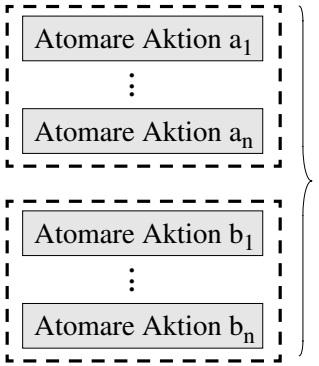
1) "Communication closed layers"



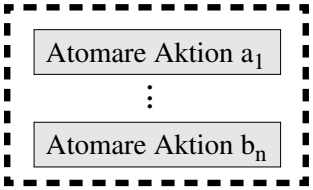
- keine "diagonale" Kommunikation
- call und upcall (innerhalb eines Knotens) nicht notw. mittels Nachrichten sondern i.a. durch Aufruf lokaler Aktionen (z.B. Prozeduren)
- Kommunikation zwischen der Anwendungs- und Kontrollebene (innerhalb eines Knotens) typw. über gemeinsame Variablen (wobei i.a. nur eine Ebene schreiben darf)

---

2) Zusammenbau und Vereinigung von Aktionen



- einzige Menge lokaler Aktionen



- Korrektheitseigenschaften einer Ebene sollen durch andere Ebenen nicht verletzt werden!

Echo-Algorithmus und upcall-Technik

```
receive <ECHO(...)> or <EXPLORER(...)> from p;
if COLOR = white then
    upcall "first EXPLORER(...) received";
    COLOR := red;
    N := 0; PRED := p;
    send <EXPLORER(...)> to neighbors\{PRED};
fi;
if echo received then upcall "ECHO(...) received"; fi;
N := N+1;
if N = | neighbors | then
    COLOR := green;
    if INITIATOR then upcall  "terminated";
                 else upcall "ready to send echo";
                      send <ECHO(...)> to PRED;
    fi;
fi;
```

Mit "upcalls" wird die darüberliegende Anwendung vom Echo-Algorithmus benachrichtigt; die Anwendung kann entweder die Kontrolle sofort zurückgeben oder z.B. Parameterwerte vorbereiten, die dann mit Nachrichten des Echo-Algorithmus mitgesendet werden.

```
{COLOR = white}
INITIATOR := true;
COLOR := red;
N := 0;
send <EXPLORER(...)> to neighbors;
```

Aktion, die von der Anwendung mit einem "normalen downcall" gestartet wird.

Echo-Algorithmus...

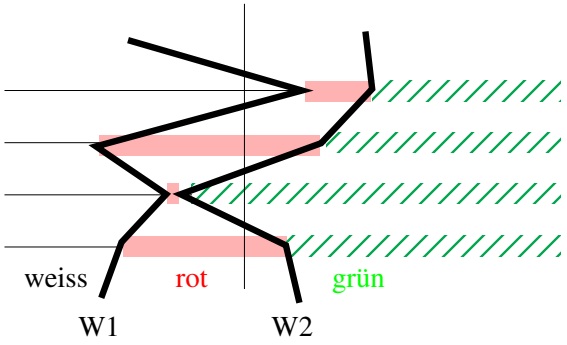
- Jeder Knoten wird erst *rot* und dann *grün*
- Rote Phase ist bei "Blättern" allerdings recht kurz
- Ein grüner Knoten hat keine weisse Nachbarn

==> Eine von einem grünen Knoten versendete Basisnachricht wird nicht von einem weissen Knoten empfangen

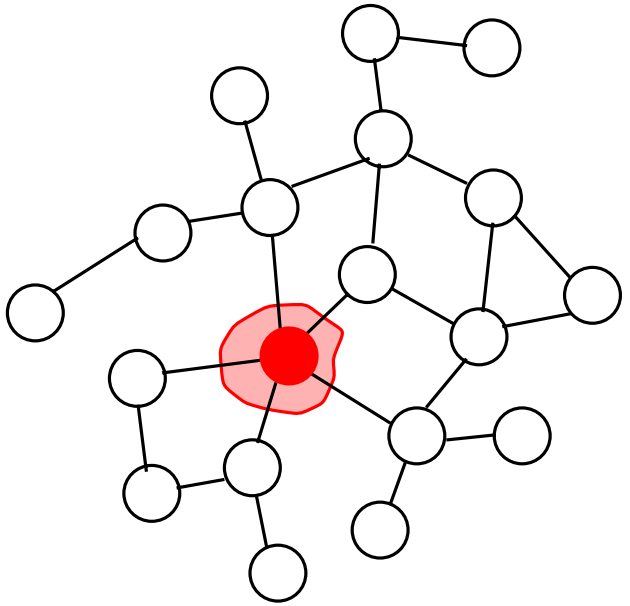
- beachte: gilt nur für *direkte* Nachrichten, nicht für *Nachrichtenketten!*

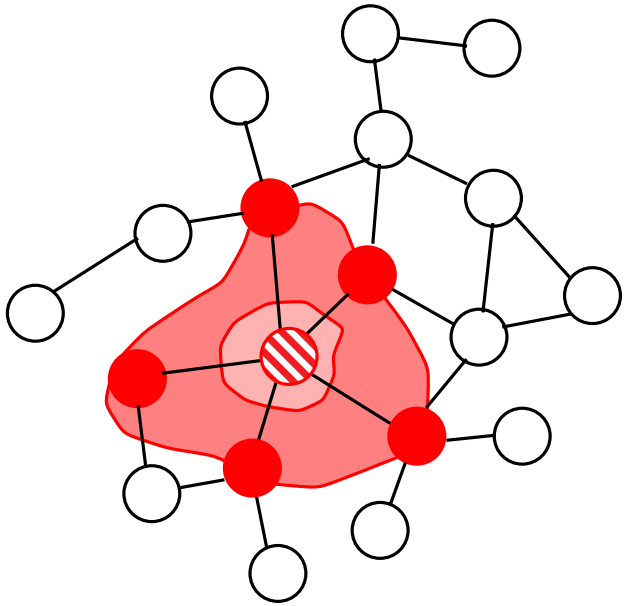
==> Weisse und grüne Phase sind in "gewisser Weise" disjunkt

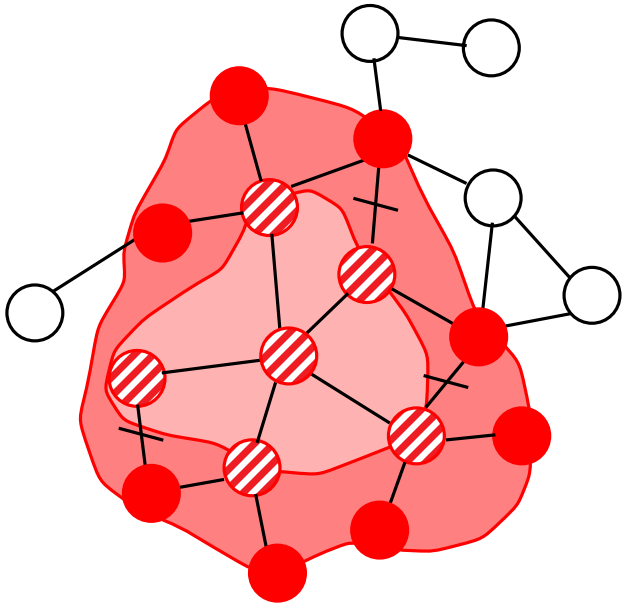
- obwohl es globale Zeitpunkte geben kann, wo ein Knoten bereits grün ist, während ein anderer (nicht direkt benachbarter!) noch weiss ist!

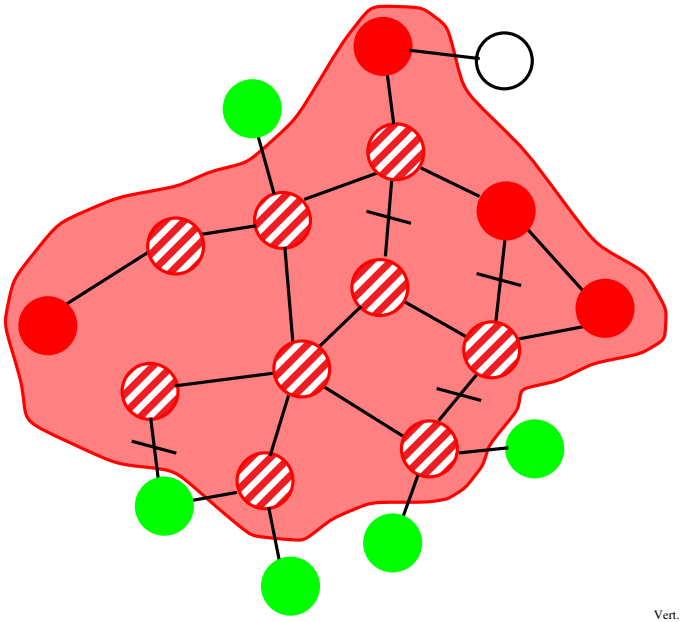


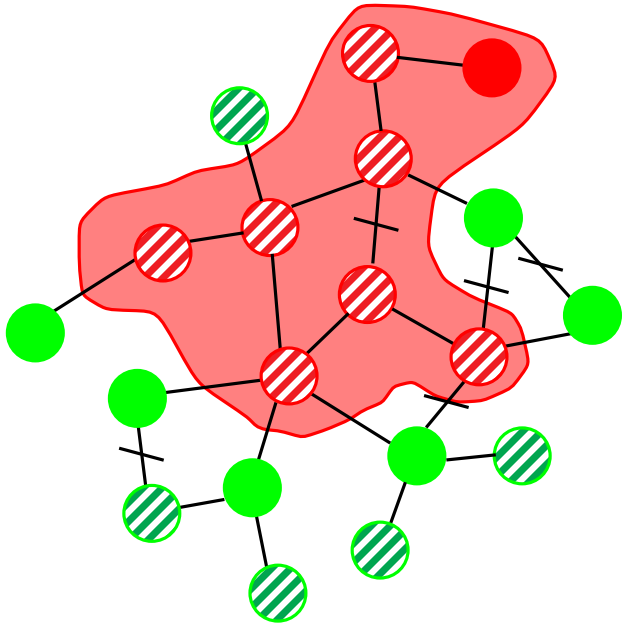
- "Rot werden" und "grün werden" definieren zwei *Wellen*
  - mit diesen Wellen kann Information transportiert werden (verteilen bzw. akkumulieren)
  - Echo-Algorithmus wird daher oft als Basis für andere Verfahren verwendet

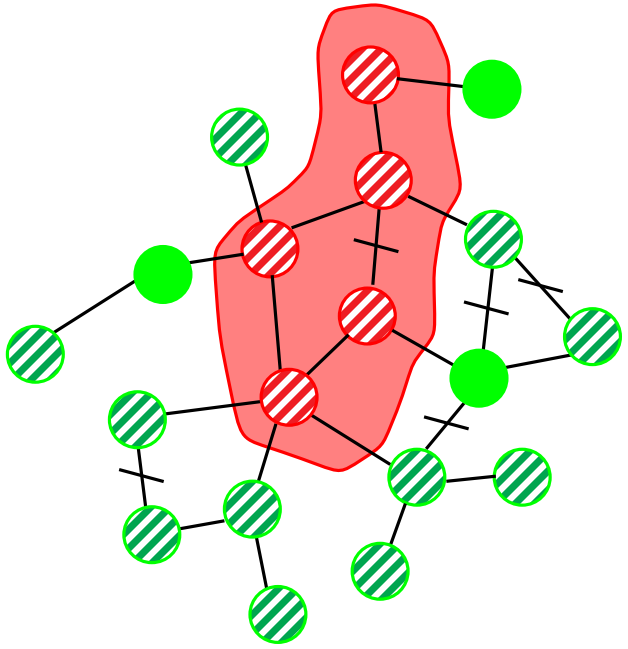


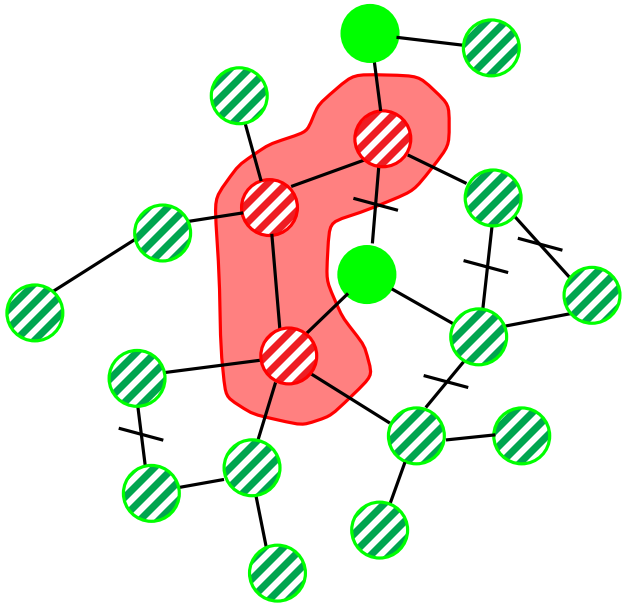


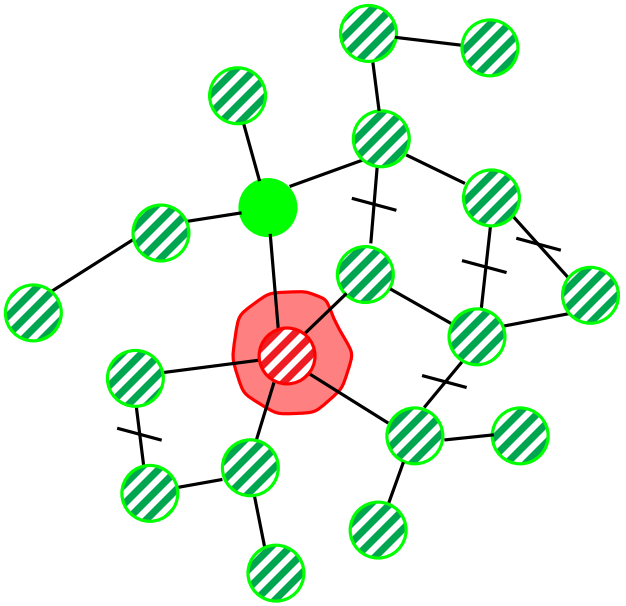


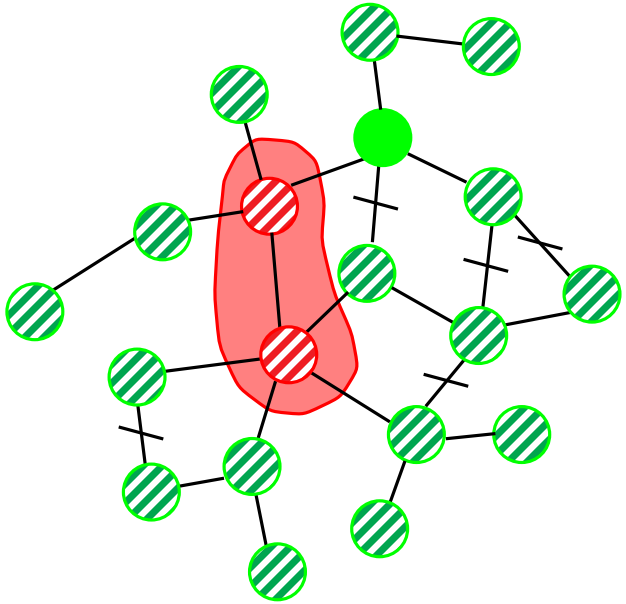


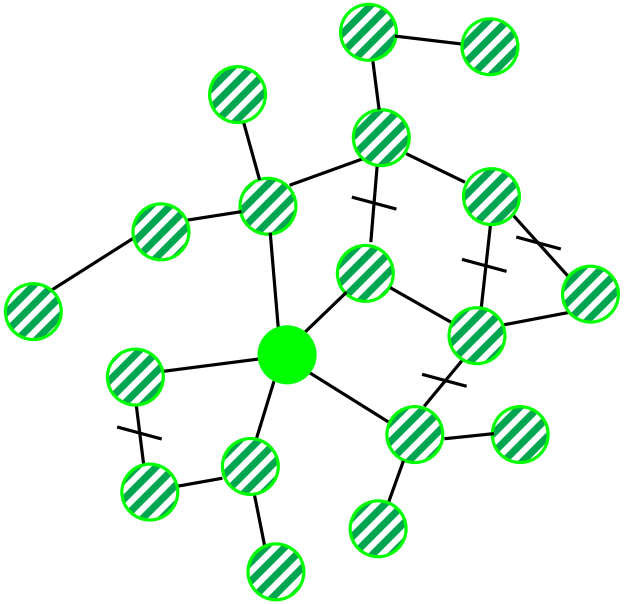










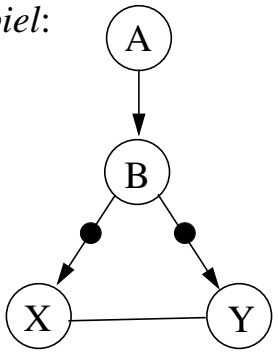


Verbesserung des Echo-Algorithmus?

[Helary et. al.]

- *Idee*: vermeide Besuch von Knoten, von denen man weiss, dass sie von anderen Explorern besucht werden

Beispiel:



Nachricht von B an X enthält Information, dass Y nicht besucht zu werden braucht

- *Voraussetzung*: Identitäten der Nachbarn bekannt

Schema (Modifikation gegenüber PIF-Echo):

Menge von Knotenidentitäten

```
receive <..., z>
...
y := neighbors \ z
send <..., z ∪ y> to all y
(* Registrieren, über welche Kanäle
Echos oder Explorer eintreffen müssen *)
```

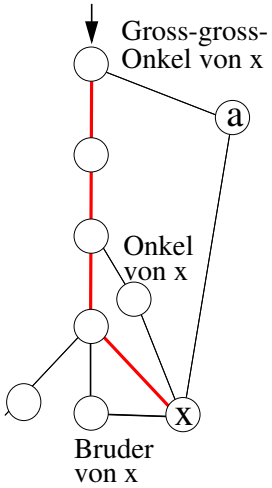
Statt neighbors ohne Vater im Original

- Initiator i: send <..., neighbors ∪ {i} >

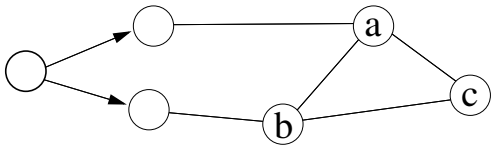
Was wird gespart?

- Keine Nachricht an einen Vorgänger oder einen direkten Nachbarn eines Vorgängers (z.B. "Brüder" und "Onkel")

- Allerdings: Obwohl x nicht an a sendet, sendet a an x! Über diese Kante fliesst dann auch ein Echo zurück --> nichts gespart, da 2 Nachrichten über die Kante!



- Auch in diesem Fall spart man nicht (immer?) etwas:



Knoten a und b werden "gleichzeitig" erreicht: wissen nichts voneinander: --> senden beide gegenseitig und an c

- Wieviel wird bei vollständigen Graphen gespart? Und bei Bäumen? Spielt der "Vermaschungsgrad" eine Rolle?

- Ersparnis nicht ganz klar
  - interessante Extremfälle, z.B. Baum oder vollständiger Graph
- Ersparnis an Nachrichten durch Nachteile erkauft
  - lange Nachrichten (O(n))
  - Nachbaridentitäten müssen bekannt sein

Das Märchen von der verteilten Terminierung

[F. Mattern - Informatik-Spektrum 8:6, pp. 342-343, 1985]

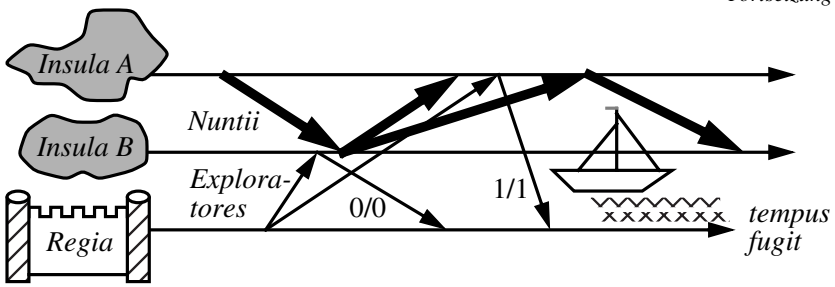
Als einst der König von Polymikronien merkte, dass die Zeit gekommen war, sein aus unzähligen Inseln bestehendes Reich gerecht unter seinen Enkelkindern aufzuteilen, sandte er Botschaften an die weit über das Land verteilt lebenden Weisen aus, auf dass diese ihm einen klugen Vorschlag unterbreiten mögen.

Wohl wusste der König um den eigenwilligen aber steten Lebenswandel seiner Ratgeber, welche den ganzen Tag nichts taten, als zu essen und zu denken: War einer von ihnen bei Speis und Trank, so konnte alleine eine königliche Botschaft oder eine Nachricht eines anderen Weisen ihn zum Denken anregen - er griff meist sogleich zu Feder, Papier, Tinte und Siegel, um einigen übrigen Mitgliedern des so weit verteilten königlichen Konsiliums eine neue Weisheit zuzusenden. Hungrig vom Denken wandt er sich alsbald wieder der stets fürstlich gedeckten Tafel zu.

Als indes die Jahre vergingen und der König immer älter wurde, ohne dass er von den Weisen einen Rat erhalten hätte, seufzte er, schickte nach seinem geheimen Hofrat und sprach zu ihm: "Ich weiss wohl, wie schwierig ein gerechter Plan zur Aufteilung meines Erbes ist, und ich kenne die Regeln meines Konsiliums, wonach man mir erst kundtut, wenn die königliche Sache so erschöpfend beraten wurde, dass ein jeder der Weisen zufrieden ist und keine Botschaft mehr unterwegs ist. Alleine die königliche Post bereitet mir Sorge - ist etwa ein Schiff in den Stürmen der Meere gesunken oder hat sich ein Bote in der Weite des Reiches verirrt?"

"O königliche Hoheit", entgegnete der geheime Hofrat und sprach weiter: "Unermesslich gross ist Euer Reich, und gar lange brauchen die Segler, um von einem Eiland zu einem anderen zu gelangen. Rein niemand vermag die Zeit vorher abzuschätzen, und es wird sogar berichtet, dass in der ein oder anderen Nacht ein Postboot ein anderes überholt. Aber die Segelkünste der Seefahrer, die hohe Schule der Schiffsbaumeister und die pflichtbewusste Ergebenheit Eurer Diener sorgen dafür, dass nicht eine einzige Botschaft verloren gehen kann. Lasset uns also Kundschafter aussenden, mein König, um jeden Ratgeber zu befragen, wieviele Botschaften er empfangen und versandt hat. So können wir leicht Gewissheit darüber erlangen, ob summa summarum so viele Nachrichten versandt wie empfangen wurden und das Konsilium des Königs Sache abschliessend beraten hat."

Fortsetzung--->



Übungen (2) zur Vorlesung "Verteilte Algorithmen"...

a) Man beweise die Korrektheit des im Märchen beschriebenen "Doppelzählverfahrens" zur Feststellung der verteilten Terminierung.

b) Man beweise die Korrektheit des Echo-Algorithmus:
- der Initiator terminiert erst, wenn alle Knoten informiert wurden ("safety"),
- nach endlicher Zeit terminiert der Initiator ("liveness").

Überlegen Sie sich, was für Beweistechniken Sie einsetzen können (Invarianten, Induktion...) und wie genau / formal die Spezifikation des Algorithmus sein sollte, damit Sie im Beweis formal argumentieren können. Geben Sie ggf. eine formalere Spezifikation des Algorithmus an.

---> Fortsetzung Märchen

Der König war hoch erfreut über diese weisen Worte, schöpfte neue Zuversicht und beauftragte sogleich den Hofmathematicus, einen Plan auszuarbeiten. Dieser erschien alsbald mit einer grossen Leinwand und sprach: "Majestät, auf diesem Szenario seht Ihr, dass des Hofrats Plan versagen kann - die zu den Eilanden A und B gesandten Kundschafter berichten, dass so viele Botschaften empfangen wie versandt wurden - summa summarum nur eine Botschaft. Nichtsdestotrotz sind noch Nachrichten unterwegs. Die Sache ist wohl so, dass die Kundschafter sehr klug vorgehen müssen, um sich nicht täuschen zu lassen und des Königs Zählung zu verfälschen, alldieweil wir primo die Uhr noch nicht erfinden konnten und somit auch keine einheitliche Reichszeit haben, secundo wir den Rundfunk noch nicht kennen und tertio die ehrwürdigen Sitten es verbieten, dass die Weisen an einem gemeinsamen Ort zusammenkommen." Der König war erstaunt über die gar wundersamen Worte und meinte: "Nun, das weiss ich wohl, denn ich bin der König. Was also rät Er mir ?" "Hoheit, mein Plan sieht vor, die Kundschafter erneut auszusenden, sobald der letzte bei Hofe eingetroffen ist. Wird alsodann das Ergebnis genau bestätigt und sind die Summen gleich, so ist keine Nachricht mehr unterwegs." "Vortrefflich", meinte der König, der nichts verstanden hatte. "Kümmere Er sich nur sogleich um die Instruktion der Kundschafter!"

Der Hofmathematicus tat wie befohlen, verbesserte seinen Plan noch verschiedentlich, und bald waren die Kundschafter mit allen königlichen Vollmachten versehen auf den besten Seglern des Reiches unterwegs zu den Weisen.

Als endlich der Schluss der Weisen bei Hofe eintraf, war der König so voll Glück, dass er den Hofmathematicus bald darauf zu seinem ersten Hofinformaticus ernannte. Und dieser forscht, wenn er nicht gestorben ist, noch heute in einem stillen Turm des königlichen Palastes... an einer noch besseren Lösung zum Problem der verteilten Terminierung!

Papier war kostbar - so verzichtete der Hofinformaticus leider darauf, einen Korrektheitsbeweis seines Planes niederzuschreiben. Einer Randbemerkung seiner Schriften entnehmen wir, dass er später ein Verfahren ersann, bei dem nicht in jedem Fall die Inseln zwei- oder mehrfach von den Kundschaftern aufgesucht werden müssen. Desweitern gelang es ihm offenbar, die Zahl der notwendigen Kundschafterfahrten durch eine einfache Funktion der Zahl der Inseln und Botschaften zu beschränken. Leider reichte wiedereinmal der Rand zur Darstellung der Methode nicht aus. Wer hilft mit bei der Rekonstruktion und Verifikation der Verfahren ?

Zeitkomplexität

Beachte: Algorithmen i.a. nichtdeterministisch --> *mehrere* mögl. Berechnungen!

Variable Zeitkomplexität eines vert. Algorithmus = max. "Zeit" aller Berechnungen des Algo unter:

Z1: Lokale Berechnungen erfolgen in Nullzeit
Z2: Eine Nachricht benötigt *maximal* 1 Zeiteinheit

Einheitszeitkomplexität eines vert. Algorithmus = max. "Zeit" aller Berechnungen des Algo unter:

E1: Lokale Berechnungen erfolgen in Nullzeit
E2: Eine Nachricht benötigt *exakt* 1 Zeiteinheit

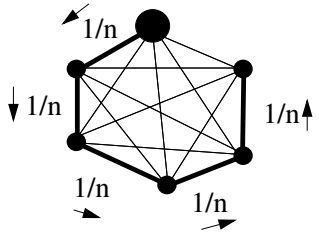
Behauptung:
Es gilt *nicht* immer variable Zeitkplx ≤ Einheitszeitkplx.

- Grund: Einheitszeitkplx erlaubt nicht alle Berechnungen!
- Frage: Gilt Umkehrung?

Bsp. Echo-Algorithmus auf vollständigem Graph

(1) Einheitszeitkomplexität = 3 ← Phase 1: Alle werden rot
Phase 2: Alle bis auf Initiator werden grün
Phase 3: Initiator wird grün

(2) Variable Zeitkomplexität ≥ n



- Explorer "aussen": 1/n Zeiteinheiten
- Jede sonstige Nachricht 1 Zeiteinheit
- Entarteter Baum Tiefe n-1 nach einer Zeiteinheit aufgebaut
- Echo beim Initiator nach n Einheiten

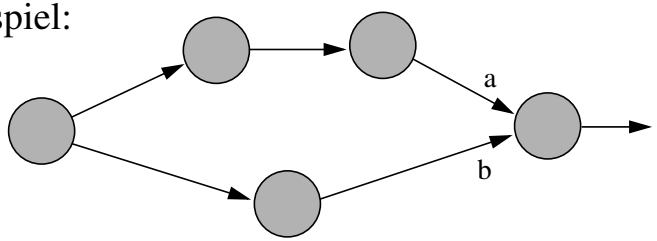
Zeitkomplexität: Welche Definition?

- *Einheitsztkplx*: Einige Berechnungen bleiben unberücksichtigt!

Nicht bei var. Ztkplx! (Wieso?)

unwahrscheinliche?

Beispiel:



Trifft a vor b ein --> sehr lange Berechnung, sonst terminiert

mag vielleicht in 10% aller Fälle der Fall sein...

aber wie oft wirklich?

systemabhängig!

- *Variable Ztkplx*: Resultat wird u.U. durch extrem unwahrscheinliche Berechnungen bestimmt

- Für worst-case: variable Ztkplx? Aber: average case?

- Genauer: Wahrscheinlichkeitsverteilung --> Erwartungswert
  - systemabhängig
  - schwierig
  - jeden Tag anders...