Token-basierte Algorithmen

- Grundidee: "Token zu mir" an alle anderen senden
  - per *broadcast* (falls entspr. Kommunikationsprimitiv existiert)
  - oder z.B. mittels *Echo-Algorithmus*
  - Aufwand ist hoch, wenn man nicht weiss, wo das Token sein könnte (z.B. Algorithmus von Ricart / Agrawala 1983)

---

aber wie bekommt man diesen?

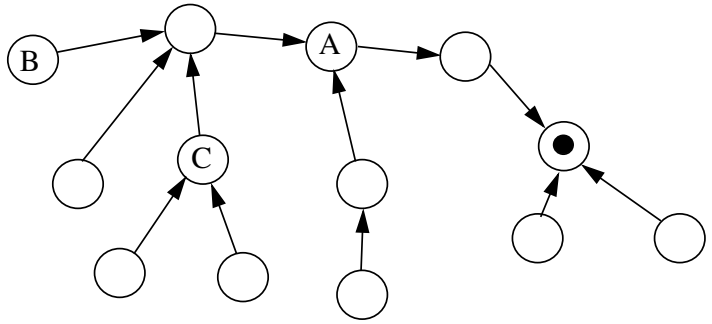
- Andere Idee: *Spannenden Baum* verwenden
  - "Suchnachrichten" wandern nur auf Kanten des Baumes
  - Token benutzt ebenfalls nur Baumkanten
  - Aufwand geringer: Maximal n-1 Einzelnachrichten, um jeden der n Knoten über den Tokenwunsch zu informieren

---

- Bessere Idee: Spannenden Baum mit *gerichteten Kanten*
  - Kanten zeigen immer in Richtung des Tokenbesitzers
  - typischerweise O(log n) Einzelnachrichten, um den Tokenbesitzer zu erreichen (aber bei gutartig / bösartig entarteten Bäumen?)
  - wenn Token seinen Ort wechselt, müssen Kantenrichtungen aktualisiert werden! (Aufwand?)

Der O(log n)-Algorithmus

- Das wäre aber besser als das "optimale" $O(\sqrt{n})$- Verfahren!?!
- Unabhängig veröffentlicht 1987 (van de Snepscheut) und 1989 (Raymond)
- Ähnliches Verfahren auch von Naimi / Trehel (1987)



- Token wandert entgegen der Pfeilrichtung zum anfordernden Prozess und dreht jede durchlaufene Kante um
- Ein Prozess sendet (bis er das Token erhält) nur ein Mal ein request auf seiner ausgehenden Kante
  - nochmals "ungeduldig" nachfragen hilft auch nichts
  - Prozess merkt sich aber, wer ihn alles um Weiterleitung des requests bat
- Bei Empfang des Tokens wird es (in fairer Weise) in eine der anfordernden Richtungen weitergeleitet
  - vorher selbst benutzen, wenn Bedarf besteht? ← vgl. "Lift-Algorithmus"
  - Fairness: Nur beschränkt oft in eine andere Richtung weiterleiten, bevor es über eine wartende Kante weitergeleitet wird
  - falls Anforderungen aus mehreren Richtungen vorliegen: Dem ausgesendeten Token sofort ein request hinterhersenden (Optimierung: Token und request zusammenfassen)
- Sind Nachrichtenüberholungen ein Problem?
  - z.B.: request überholt Token

Skizze des Algorithmus

- *Nachrichtenarten*:
  - REQUEST
  - TOKEN

- *Lokale Variablen eines Prozesses P_i*:
  - HOLDER = 'self' oder Name des Nachbarn, in dessen Richtung das Token liegt
  - ASKED: bool = 'true' $\Leftrightarrow$ es ist ein REQUEST in Richtung HOLDER versendet worden
  - REQ_QUEUE = FIFO-Warteschlange für angekommene REQUEST-Nachrichten von Prozessen, die das Token möchten (enthält Namen von Nachbarn oder 'self')

- Garantiert 'FIFO'-Eigenschaft der Warteschlange Fairness?

Skizze des Algorithmus (2)

Einige Details müssten in naheliegender Weise ergänzt werden

- Prozess P_j möchte Token, hat es jedoch nicht:

```
Füge 'self' an REQ_QUEUE an;
if not ASKED then
      send REQUEST to HOLDER; ASKED := true;
```

- P_j empfängt REQUEST von P_i:

```
Füge 'Pi' an REQ_QUEUE an;
if not ASKED and HOLDER ≠ self then
      send REQUEST to HOLDER; ASKED := true;
```

- P_j empfängt Token von P_k:

```
HOLDER := dequeue(REQ_QUEUE);
if HOLDER = self then  <kritischer Abschnitt>
                  else send TOKEN to HOLDER
                       if |REQ_QUEUE| > 0 then
                          send REQUEST to HOLDER;
                          ASKED := true;
```

- P_j hat Token und möchte es loswerden:

```
if |REQ_QUEUE| > 0 then
   HOLDER := dequeue(REQ_QUEUE);
   send TOKEN to HOLDER;
   if |REQ_QUEUE| > 0
      then send REQUEST to HOLDER;
      else ASKED := false;
```

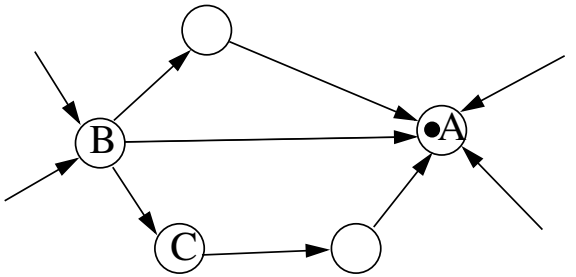
Verallgemeinerung auf allg. Graphen

- Gerichtet, azyklisch und schwach zusammenhängend
- Kann man die Kanten jedes ungerichteten Graphen so orientieren, dass kein Zyklus entsteht?
  - Bsp. Stadtplanung: Einbahnstrassenrichtung so festlegen, dass man nicht im Kreis fahren kann
  - Ja: Willkürliche Ordnung auf den Knoten festlegen (z.B. Knoten numerieren) und Kanten entsprechend dieser Ordnungsrelation orientieren!

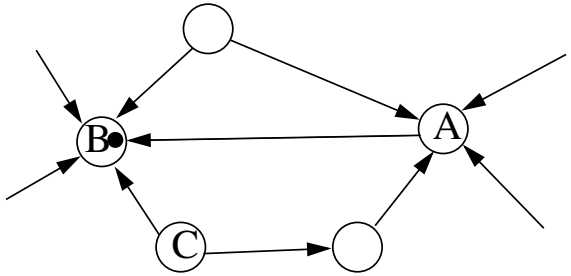
- Präzisere Forderung: Jeder gerichtete Weg soll beim (eindeutigen) Tokenbesitzer enden
  - Klar, dass Tokenbesitzer nur eingehende Kanten hat
  - Auch das geht!
    - Starte Echo-Algorithmus vom Tokenbesitzer aus
    - Durch die Flussrichtung der Echos entsteht ein auf diesen Knoten hin gerichteter Baum
    - Nun müssen noch die Nicht-Baumkanten orientiert werden
    - Dazu bekommt jeder Knoten eine Ordnungsnummer aus:
      - seiner Höhe (= Entfernung zur Wurzel = Tokenbesitzer) als primärem Ordnungskriterium,
      - einem eindeutigen sekundären Ordnungskriterium
    - "Flussrichtung" der Kanten von der höheren zur niedrigeren Ordnungsnummer --> ist azyklisch!

Tokenanforderung

- Schicke request über irgendeine ausgehende Kante
  - klappt mit jeder Kante (Weg zum Token ist aber i.a. verschieden lang)
  - auch denkbar: über alle Pfade gleichzeitig... (--> mehr Aufwand!)



Regel: Wenn das Token wandert, werden *alle* Ausgangskanten des Empfängers invertiert



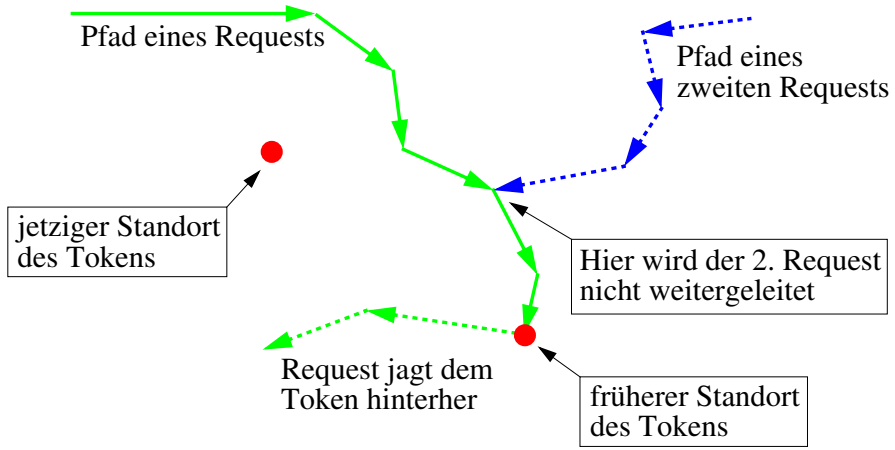
- Behauptung: *Zyklenfreiheit ist eine Invariante*

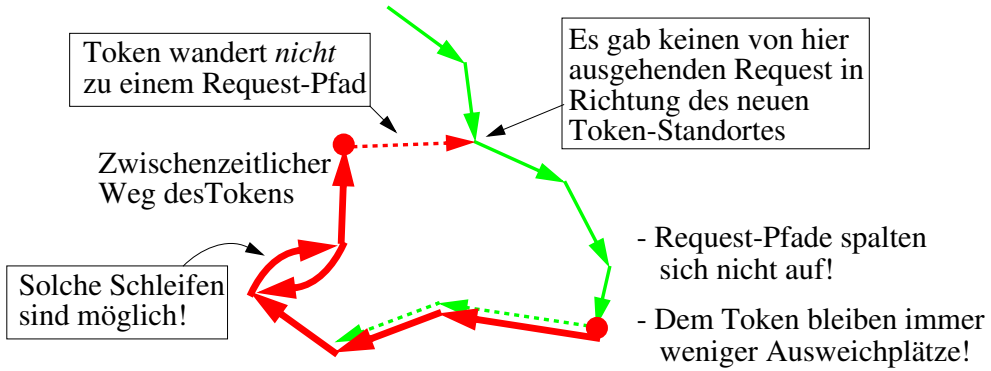
Beweis: Neue Zyklen können höchstens durch die invertierten Kanten entstanden sein - mit diesen ist jedoch kein Zyklus möglich, da sie alle zum neuen Tokenbesitzer gerichtet sind, welcher keine ausgehenden Kanten besitzt

- Weitere Invariante: *Jeder gerichtete Pfad endet beim Tokenbesitzer*

Glücklose Token-Jagd?

- Wieso holt ein Request das Token schliesslich immer ein?





- Wie verträgt sich das Mergen der Pfade mit der Fairness?

Aufwand und Varianten

- Bemerkung: Richtung einer Kante sei als "Wegweiser" im ausgehenden Knoten gespeichert

- Allen Nachbarn des neuen Tokenbesitzers muss daher eine Meldung gesendet werden, damit diese den "Wegweiser" entsprechend setzen
  - tatsächlich allen, oder kann man sich das für einige sparen?
  - "Gewinn" des Verfahrens: Nachbarn haben nun i.a. einen kürzeren Weg zum Token
  - Denkübung: muss der Empfang aller dieser Meldungen abgewartet werden (Quittungen!), bevor das Token weiterreisen darf?

- Variante: Statt die Nachbarn zu informieren:
  - Nur die Richtung der einen vom Token durchlaufenen Kante ändern
  - Beim neuen Tokenbesitzer alle ausgehenden "Wegweiser zum Token" löschen

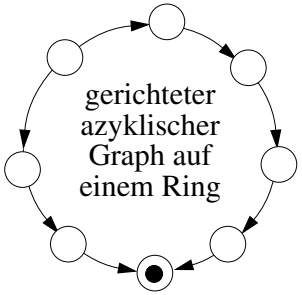
    --> es entstehen ungerichtete Kanten!

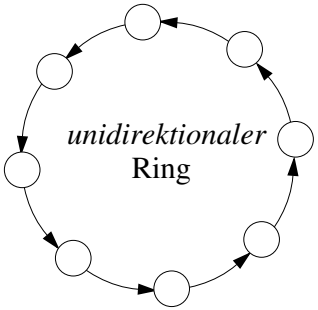
- Dies spart Nachrichtenaufwand! Vergleich mit:
  - obigem "Originalverfahren"?
  - Verfahren mit spannendem gerichteten Baum?

- Welche Entfernung legt das Token im Mittel zurück?

- Ist ein vollst. Graph ein interessanter Sonderfall?

Sonderfall Ring ?





- Auf *unidirektionalen* Ringen ist folgende Variante möglich:
  - Token wird "gejagt" (statt zurückgeholt)
  - Token kommt damit schliesslich beim Anforderer an
  - Jagdnachricht wird von einem Knoten nicht weitergeleitet, wenn dieser bereits eine solche (seit dem letzten Tokenbesuch) ausgesendet hat

---

- Frage: Sind FIFO-Kanäle notwendig?
- Variante: ständig kreisendes Token ("perpetuum mobile")
  - keine "Jagdnachrichten" nötig
  - --> Algorithmus hatten wir anfangs bereits genannt!

Welcher Baum beim O(log n)-Verfahren?

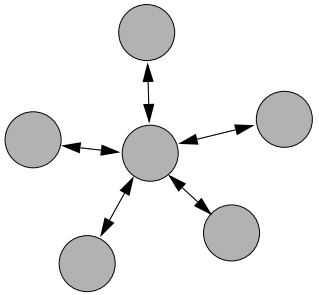
- Baum mit inneren Knoten vom *Grad k*:
  - --> längster Weg hat Länge $O(\log_k n)$; durchschnittliche Weglänge ebenfalls
  - --> bestimmt die Nachrichtenkomplexität bei *schwacher Last*
  - Knoten im "Zentrum" werden mehr belastet als weiter aussen liegende Knoten!
  - Grad an Fairness?

fast nie mehrere gleichzeitige Konkurrenten

Nachrichtenkomplexität bei *starker Last*:

- Idee: Jedes Weitersenden des Tokens ein "Treffer"
- Genauer: Token *traversiert* den Baum (wegen Fairness)
  - --> n Knotenbesuche bei 2(n-1) Token-Nachrichten
  - --> weiterer Faktor 2, da gleiche Anzahl von requests
  - --> ca. 4 Nachrichten pro Betreten des kritischen Abschnittes
- Algorithmus wird bei starker Last also "besser"!

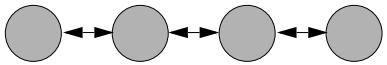
- *Stern*:



$O(\log_n n) = O(1)$

- Kürzeste Wege --> beste Topologie? (D.h. wenn schon Baum, dann diesen?)
- Unterschied zur Lösung mit zentralem Manager? (Und was war daran so schlecht?)
- Beachte: Einen Spannbaum gibt es immer; ein Stern erfordert aber u.U. zusätzliche (logische oder physische) Verbindungen!

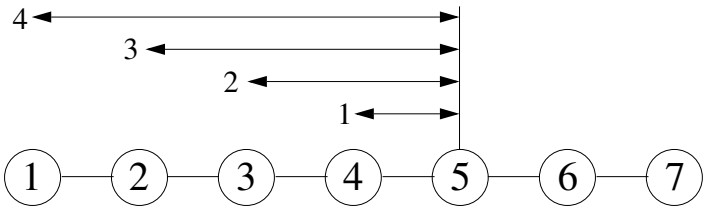
- *Lineare Kette* als entarteter Baum



--> mittlere Weglänge ≈ n/3 (Beweis: einfaches kombinator. Nachrechnen)

Mittlere Weglänge im linearen Fall

(Für diejenigen, denen das Rechnen Spass macht)



$$\left.\begin{array}{l} 1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ 1+2+3+4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1+2+3+(n-1) \end{array}\right\} \quad \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j$$

Denn es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(n-1)\,n\,(2(n-1)+1)}{6} + \frac{1}{2}\,\frac{n\,(n-1)}{2}$$

Gemittelt über alle n(n-1)/2 ungerichteten Paare {i,j} mit i≠j:

$$\text{--> } \frac{2(n-1)+1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2n+2}{6} = \frac{1}{3}\,(n+1) \approx \underline{\underline{n/3}}$$

(ggf. abzüglich der Fälle, wo das Token bereits "vor Ort" ist)