Version vom
9. März 2025

13.

Komplexität von Algorithmen

Buch Mark Weiss „Data Structures & Problem Solving Using Java“ siehe:
- 223-227, 237-243, 248-250

Lernziele Kapitel 13 Komplexität von Algorithmen

- O-Notation für die asymptotische Zeitkomplexität beherrschen
- Typische Vertreter der wichtigsten Komplexitätsklassen kennen

Thema / Inhalt

Algorithmen benötigen Rechenzeit und brauchen Speicherplatz. Diese Ressourcen sind oft kritisch: Sie kosten etwas oder sind a priori limitiert. Um dies analytisch behandeln zu können, muss man den Ressourcenbedarf quantifizieren. Dieser hängt typischerweise von der Grösse des durch den Algorithmus bearbeiteten Problems ab – beispielsweise dürfte der Ressourcenbedarf um so grösser sein, desto mehr Zahlen zu sortieren sind. Die „**Problemgrösse**", die den Ressourcenbedarf wesentlich bestimmt (also z.B. die Anzahl der zu sortierenden Elemente), wird mit n bezeichnet. Die Ausführung von Algorithmen, eine „Berechnung", geschieht in aufeinanderfolgenden Rechenschritten. Oft nimmt man vereinfachend an, dass jeder Schritt gleich viel Zeit benötigt. Dann ist hinsichtlich der Zeitkomplexität interessant, wie viele Schritte (in etwa) bei einer Problemgrösse von n vom Algorithmus ausgeführt werden. Die **Zeitkomplexität** eines Problemlösungsalgorithmus ist damit eine Funktion f(n). Diese Funktion wächst typischerweise monoton – ein umfangreicheres Problem benötigt zur Lösung länger als der gleiche Problemtyp in kleinerer Instanz.

Nun kann sich ein gewisses Problem (Multiplikation von Zahlen, Sortieren von Zahlen, Binärsuche etc.) auch bei fester Problemgrösse n unterschiedlich darstellen (zu sortierende Zahlen liegen absteigend sortiert oder zufällig angeordnet vor; bei der Binärsuche liegt das zu suchende

Thema / Inhalt (2)

Element ganz links oder genau in der Mitte etc.), was bei manchen Algorithmen unterschiedlichen Aufwand verursacht. Daher ist man meist am Durchschnitt vieler Fälle (average case), manchmal auch an den Extremfällen (best / worst case) interessiert.

Oft will man gar nicht den genauen Wert der Komplexitätsfunktion f(n) kennen, sondern nur wissen, wie schnell sie im Prinzip wächst. Vereinfachend ausgedrückt, werden dazu alle im Wesentlichen gleich schnell wachsenden Funktionen zu **Komplexitätsklassen** zusammengefasst. Mit **O(f(n))** werden solche Funktionenklassen bezeichnet, wo das Wachstum nicht schneller als beim aufgeführten Repräsentanten f erfolgt, beispielsweise O(log n) oder $O(n^2)$. Im ersten Fall spricht man von logarithmischer Komplexität (dann kann man auch noch recht grosse Probleme in vernünftiger Zeit, d.h. mit wenigen Berechnungsschritten, ausführen), im zweiten Fall von quadratischer Komplexität. Ist letzteres der Fall, muss man aufpassen: Wenn das Problem 8 Mal grösser wird, dann wird bei quadratischem Wachstum etwa 64 Mal mehr Rechenzeit benötigt! Es gibt aber noch schneller wachsende und daher in der Praxis „unangenehmere" Komplexitätsklassen; schnellere Prozessoren verbessern die Situation hinsichtlich des bewältigbaren Problemumfangs zugehöriger Algorithmen dann kaum!

Spannend wird es, wenn man zeigen kann, dass ein bestimmtes algorithmisches Problem (z.B. das Sortieren) einen **inhärenten Mindestaufwand** zur Lösung verursacht. Einerseits kann man dann die Hoffnung begraben, gewisse Probleme eines nennenswerten Umfangs jemals lösen zu können. Andererseits kann man, ja muss man vielleicht, kreativ nach Auswegen suchen. Genügt vielleicht auch eine approximative Lösung, die sich eventuell viel leichter finden lässt? Und vor allem kann man sich die Tatsache, dass etwas nicht effizient geht, umgekehrt auch zunutze machen – ein grosser Teil der Kryptographie, und damit der Informationssicherheit, beruht gerade darauf, dass Schlapphüte und andere Malefikanten, aber auch Hinz und Kunz, aus einer abgehörten Kommunikation eben gerade nicht den Geheimschlüssel einfach berechnen können!

Ist mein Algorithmus zu langsam? Oder evtl. das zu lösende Problem inhärent schwierig?

- Fragen sind so noch etwas naiv formuliert
- Aber berechtigt und relevant!
- Wir hatten uns ja bereits bei der altägyptischen Multiplikation gefragt, wie „effizient“ der Algorithmus ist
- Und wie „komplex“ ist die Multiplikation als solche?

www.porterbleepeople.com/wp-content/uploads/2015/03/needle_in_the_haystack_4.jpg

Motivation der Komplexitätstheorie

Die Komplexitätstheorie beschäftigt sich mit der Abschätzung des Aufwandes, welcher zur Lösung algorithmischer Probleme nötig ist. Zur Motivation des Gebiets zitieren wir aus: Johannes Köbler, Olaf Beyersdorff, „Von der Turingmaschine zum Quantencomputer – ein Gang durch die Geschichte der Komplexitätstheorie" (in: Wolfgang Reisig und Johann-Christoph Freytag. Informatik: aktuelle Themen im historischen Kontext. Springer-Verlag, 2006):

Die Informatik als eine den Anwendungen verpflichtete Wissenschaft sieht sich vor die Aufgabe gestellt, für praktisch auftretende Probleme möglichst gute Algorithmen zu finden. Anwendungsszenarien aus völlig verschiedenen Bereichen führen dabei auf einer abstrakteren Ebene häufig zu derselben Problemstellung. Oftmals lassen sich solche Probleme mit Methoden der Logik, Graphen oder anderen kombinatorischen Werkzeugen modellieren. Viele dieser Probleme sind seit Jahrzehnten intensiv untersucht worden, und für viele hat man gute Algorithmen gefunden: diese Algorithmen sind schnell und gehen sparsam mit dem Speicherplatz um. Eine große Klasse praktisch überaus relevanter Probleme jedoch hat sich einer befriedigenden algorithmischen Lösung bislang hartnäckig widersetzt. Trotz der stetig steigenden Leistungsfähigkeit moderner Rechner werden selbst für einfache Instanzen dieser Probleme derart immense Rechenkapazitäten benötigt, dass diese Probleme nach derzeitigem Wissensstand als praktisch unlösbar angesehen werden müssen. Woran liegt das? Warum sind manche Probleme relativ einfach und andere, oft ganz ähnliche Probleme, anscheinend algorithmisch viel komplizierter? Antworten hierauf sucht die Komplexitätstheorie.

Aufwand von Algorithmen

"Theoretically each method may be admitted to be perfect; but practically the time and attention required are, in the greater number of cases, more than the human mind is able to bestow." -- Charles Babbage (1864)

- Algorithmen verbrauchen Rechenzeit
- Benutzte Datenstrukturen benötigen Speicher
- Wichtiges Ziel: Diesen Ressourcenbedarf minimieren
  - Beispiel einer typischen Frage: Wie hoch ist der Ressourcenbedarf beim Sortieren von n Elementen (bei einem konkreten Algorithmus)?
  - Frage präzisieren!
    → Im Durchschnitt? Im worst case? Unter welchen Bedingungen?

„Mathematiker sind von Haus aus trainierte Pessimisten: Bewiesen ist nur, was unter keinen Umständen schief gehen kann. Also wird immer das Schlimmste angenommen."
-- Bernhard Steffen

Begriffe bei der Aufwandsanalyse

- Problemumfang bzw. -grösse wird meist mit **n** bezeichnet
  - Oft: Anzahl der Eingabewerte
  - Manchmal aber auch zweckmässig: Gesamtzahl der Bits der Eingabe
  - Beispiele:
    - Zahl der *Sportvereine*, für die ein Saisonspielplan mit gewissen Nebenbedingungen gefunden werden soll
    - Zahl der *Städte*, für die paarweise der kürzeste Weg berechnet werden soll
    - Zahl der *Bits* bei der Primfaktorzerlegung von grossen Zahlen
    - Viele Graphenprobleme: Zahl der *Kanten* x und Zahl der *Knoten* y (der Aufwand könnte z.B. proportional zu $x \cdot \sqrt{y}$ sein)
- Der Aufwand (Bedarf an Zeit bzw. Speicherplatz in sinnvollen Einheiten) ist typischerweise von n abhängig
  - Wird daher als Funktion f(n) angegeben, f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$
  - Typischerweise wächst f monoton (oft sogar recht schnell)
- Zeitkomplexität typw. als Anzahl von Berechnungsschritten
  - Dabei muss klar sein, was genau ein elementarer Schritt sein soll, welches Modell einer Maschine man also annimmt

Begriffe bei der Aufwandsanalyse (2)

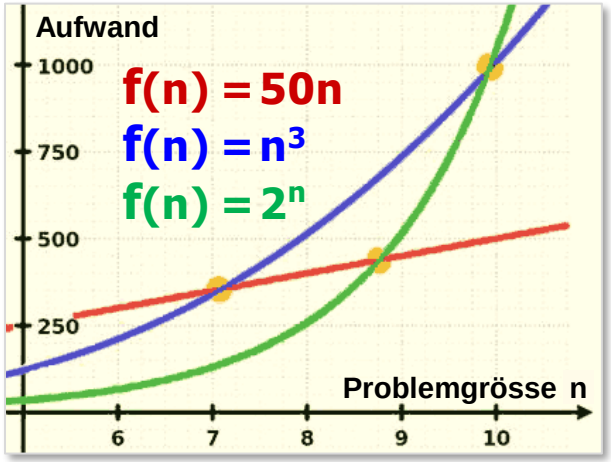
- Beim Zeitaufwand wird im Allgemeinen von konstanten Faktoren (und asymptotisch irrelevanten additiven Termen) abstrahiert
  - Also z.B.: **$f(n) = n \log(n)$** statt genauer **$3 + 5\, n \log(n)$**
  - Grund: Aussagen zur Komplexität von Algorithmen sollen möglichst allgemeingültig sein, d.h. unabhängig von speziellen Eigenschaften einer Maschine, einer Implementierung oder technologischen Details

- Oft ist der Aufwand eines Algorithmus nicht nur von der Problemgrösse n, sondern von den konkreten Eingabewerten (oder auch deren Reihenfolge) abhängig, daher unterscheidet man:
  - günstigster Aufwand („best case")
  - mittlerer Aufwand („average case") ← Für eine angenommene Verteilung der Eingabewerte
  - ungünstigster Aufwand („worst case")

Der mittlere Aufwand ist vor allem dann interessant, wenn Fälle nahe am best bzw. worst case selten sind.

Begriffe bei der Aufwandsanalyse (3)

- Oft ist man nicht am exakten Wertverlauf der Komplexitätsfunktion f interessiert, sondern nur an der „Wachstumstendenz", also am (oft leichter bestimmbaren) asymptotischen Aufwand (für $n \to \infty$)
  - Beachte: für „kleine" n kann ein Algorithmus mit schlechterem asymptotischen Aufwand dennoch besser sein (→ break even point)!



- Komplexität eines *Problems* ⚠ = geringstmöglicher Aufwand, der mit dem dafür besten (!) Lösungsalgorithmus erreicht werden kann
  - Manche Probleme sind inhärent aufwendig / schwierig / „komplex" (etwa: „kann mit keinem Algorithmus schneller als quadratisch gehen")
  - Im positiven Sinn genutzt etwa bei sicheren kryptographischen Verfahren (deswegen brauchen z.B. die Bitcoin-Miner so unverschämt viel Energie!)

Grössen-Ordnungen

Verschiedene
Geschwindigkeitsklassen

Letztendlich sind alle Autos schneller als alle Velos

Komplexitätsgrössenordnung

- Zweck: Angabe der Grössenordnung der (Zeit)komplexität eines Algorithmus als Funktion der Eingabegrösse („n“)
- Idee: Von unwesentlichen Konstanten abstrahieren
  - Technologieparameter, Implementierungsdetails, Zeiteinheiten,…
- Schreibweise:
  - $O(\log n)$ logarithmische
  - $O(n)$ lineare
  - $O(n \log n)$ linear-logarithmische
  - $O(n^2)$ quadratische
  - $O(n^3)$ kubische
  - $O(n^k)$ (mit $k \in \mathbb{Q}^+$) polynomielle
  - $O(c^n)$ exponentielle (für festes c)
  - $O(1)$ konstante (d.h., unabhängig von n)

} Komplexität

„In der Praxis gelten alle Probleme als gut lösbar, die sich in Zeit bis $O(n^3)$ lösen lassen. Die ‚versteckten Konstanten‘ sollten allerdings nicht zu gross sein. In der Theorie gelten alle Probleme als gut lösbar, die sich in Zeit $O(n^k)$ lösen lassen für irgendein k.“ -- Till Tantau

Die O-Notation

- Man sagt, die Komplexität eines Algorithmus ist von der Grössenordnung O(f(n)), wenn für die „wirkliche" Komplexität g(n) des Algorithmus gilt:

$$\exists n_0, c>0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c\, f(n)$$

c·f ist also eine asymptotisch obere Schranke für g

g wird ab einem gewissen n_0 majorisiert

- Beispiel: Für $7 + 1.5\,n + 3n^2$ schreibe $O(n^2)$

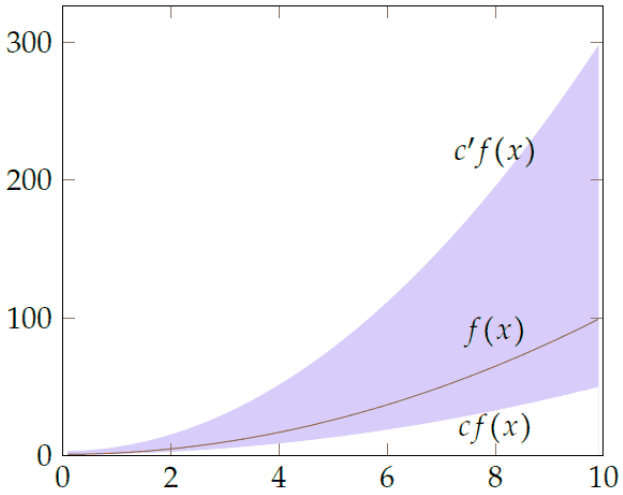
$O(n^3)$ oder $O(2^n)$ wäre auch richtig, aber „übertrieben"

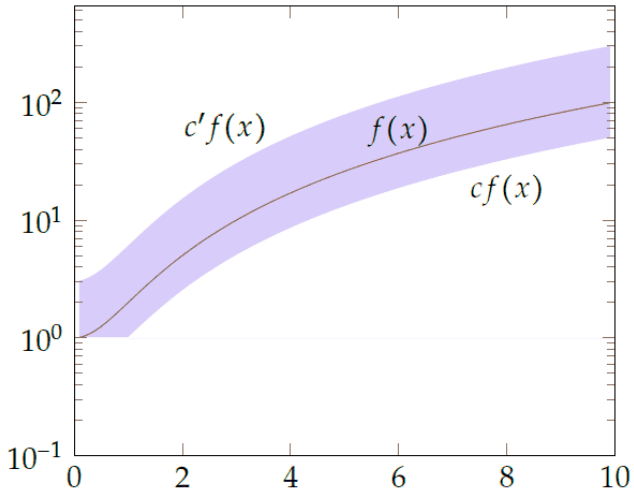
- Informelle Interpretation: Die Laufzeit wird „im wesentlichen" durch O(...) beschränkt
  - Oder oft noch unpräziser: „ist etwa proportional zu"

Interessant ist hier im Allgemeinen die „kleinste" Funktion f, die g majorisiert

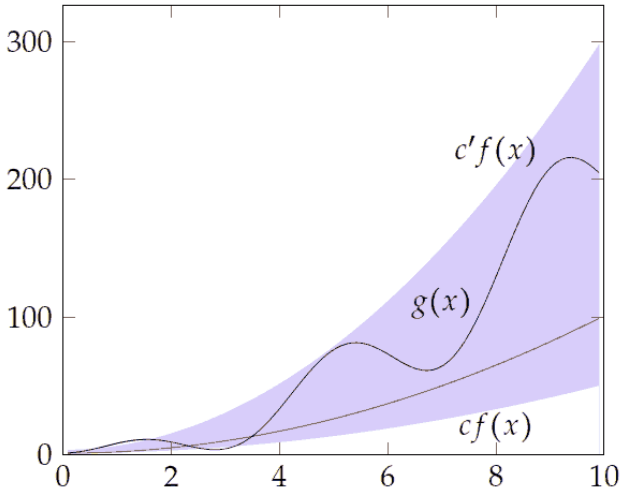
- Oft kann man zumindest die Grössenordnung in O-Notation angeben, ohne die wirkliche Komplexität exakt zu kennen
  - Sinngemäss: „Gehört zur Klasse der Velos, nicht zu den Flugzeugen!"

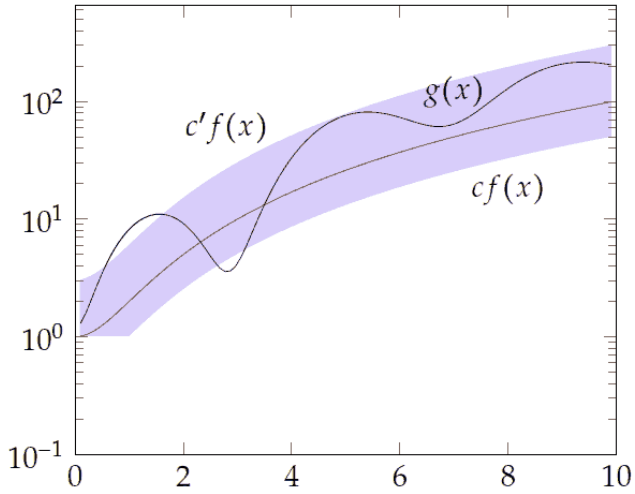
Schranken und Schläuche





Zweimal dieselbe Funktion f(x) sowie zwei Schranken c f(x) und c' f(x); linke Darstellung mit linear skalierter y-Achse, rechte Darstellung mit logarithmisch skalierter y-Achse.





Zweimal dieselbe Funktion g(x), die für $n > 4$ durch c f(n) und c' f(n) beschränkt ist. Der Graph von g liegt fast überall innerhalb des blauen Schlauches, der in der halblogarithmischen Darstellung besonders ausgeprägt ist.

Bild: Thomas Worsch, KIT

Laufzeiten und Problemgrössen

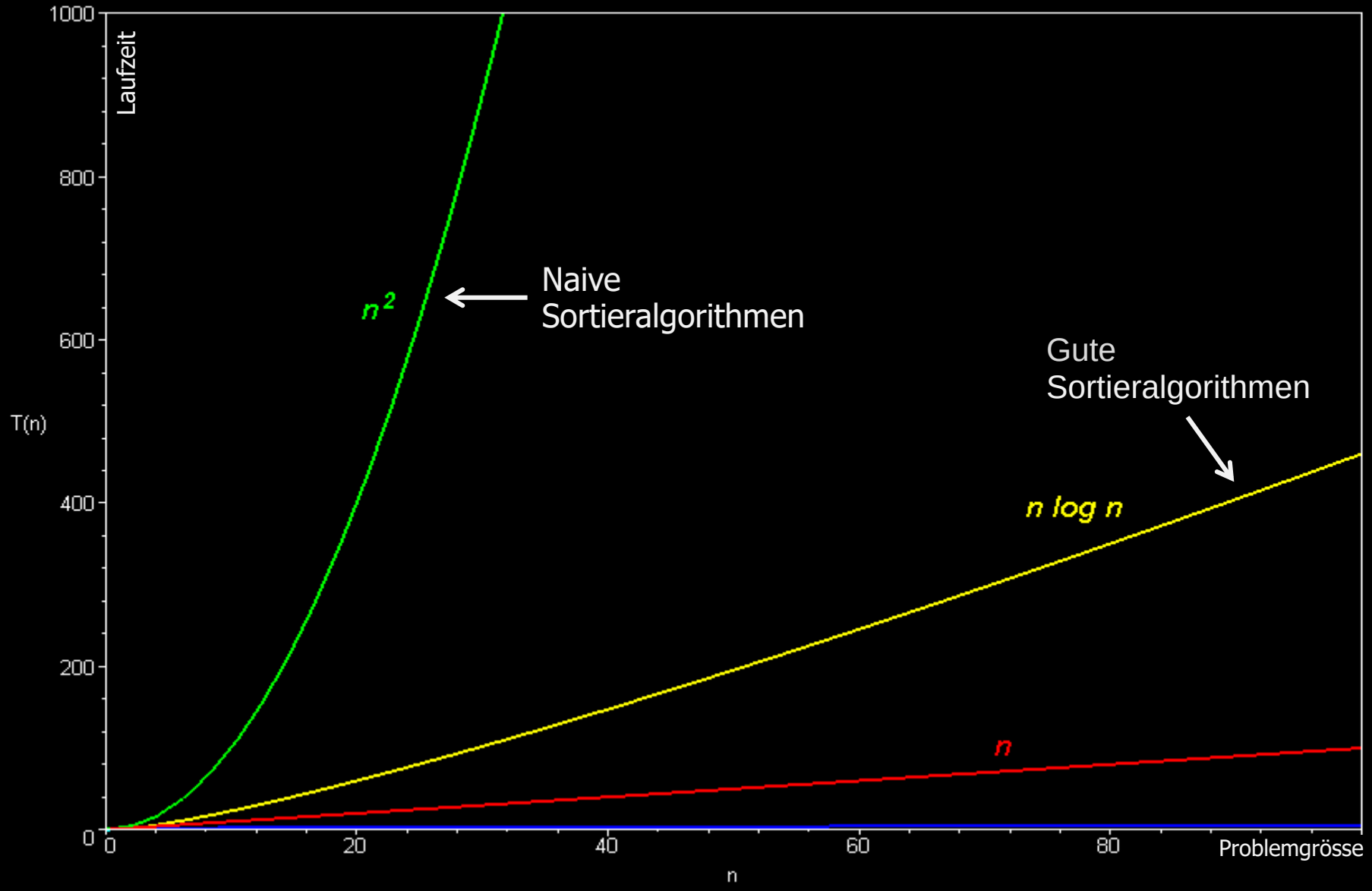


Image source: http://science.slc.edu/~jmarshall/courses/2002/spring/cs50/BigO/

Laufzeiten und Problemgrössen

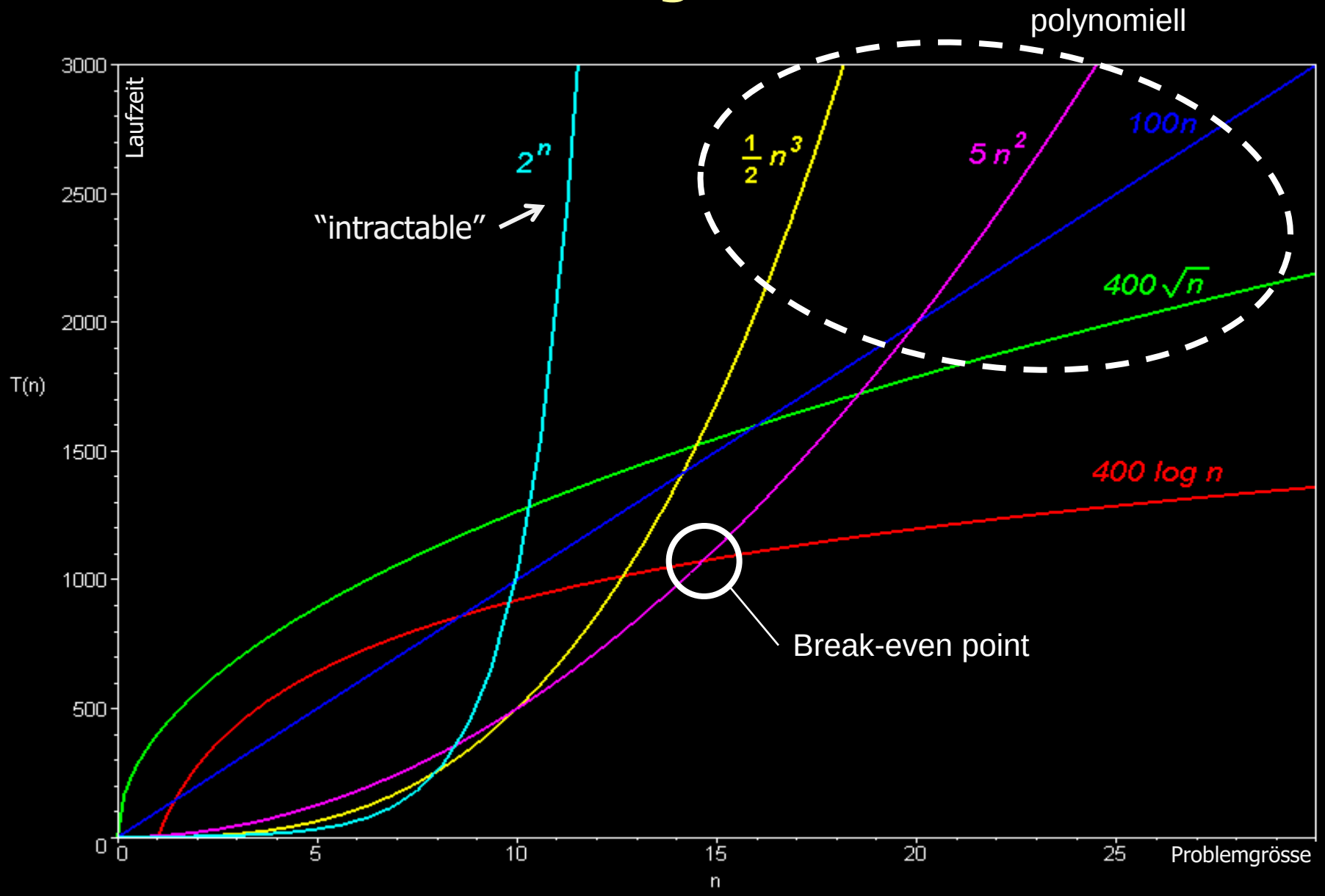
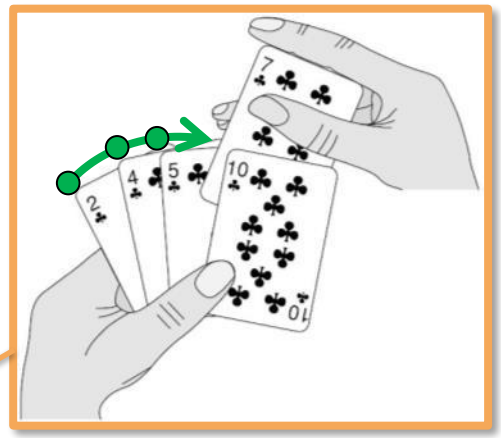


Image source: http://science.slc.edu/~jmarshall/courses/2002/spring/cs50/BigO/

Asymptotische Zeitkomplexität: Beispiele aus der Vorlesung



- Ägypt_mult(m,n); ggT(m,n): $O(\log n)$
- Exchange sort; insertion sort: $O(n^2)$
- Typ. Spielbäume; Türme von Hanoi: $O(2^n)$
- Quicksort sowie Sortieren mit Suchbäumen: $O(n \log n)$ … $O(n^2)$
- Mergesort: $O(n \log n)$
- Binärsuche: $O(\log n)$

aver. case

worst case

average und worst case

- Umwandlung Infix-Ausdruck → Postfix-Ausdruck: $O(n)$
  (mit n = Ausdruckslänge: Anzahl Operanden, Operatoren, Klammern)
- Push bzw. pop auf einen Stack mit n Elementen: $O(1)$
  (falls vernünftig implementiert)

Nicht in der Vorlesung behandelt:
Einfacher Primzahltest von n: $O(\sqrt{n})$; Travelling Salesman (naiv): $O(n!)$

Maximaler Problemumfang bei gegebener Zeit

- Beispiel: Bei Zeitbedarf von 10 µs für n=1:

	1 Sek.	1 Min.	1 Stunde
n	100000	$6 \cdot 10^6$	$3.6 \cdot 10^8$
n log n	7740	327491	15 095 829
n^2	316	2449	18974
n^3	46	181	711
2^n	16	22	28
n!	8	10	11

Beispiel: Wenn ein Schritt 10 µs benötigt, dann brauchen $181^3 = 5\,929\,741$ Schritte ca. $10 * 6\,000\,000$ µs = 1 Min

Zeitbedarf bei vergrössertem Problemumfang

- Beispiel: Bei 1 µs für n=1:

	n=1	n=100	n=10 000	n=100 000
log n	1 µs	7 µs	13 µs	17 µs
n	1 µs	100 µs	0.01 s	0.1 s
n^2	1 µs	0.01 s	1.7 min	2.8 Std
2^n	1 µs	10^{14} Jahrh.	$\approx \infty$	$\approx \infty$

Zeitbedarf bei vergrössertem Problemumfang (2)

Eine ausführlichere Erläuterung findet sich bei www.cs.cmu.edu/afs/cs/Web/People/pattis/15-1XX/15-200/lectures/aa/index.html; hier einige Auszüge (gekürzt und korrigiert):

We will learn how we can easily and accurately predict how long it will take a method to solve a large problem size, if we know the complexity class for the method, and have measured how long the method takes to execute for some large problem size. Notice both the measured and predicted problem sizes must be reasonably large, otherwise the simplifications used to compute the complexity class will not be accurate: the lower order terms will have a real effect on the answer.

For a first example, we will measure, and then predict, the running time of a simple, quadratic sorting method. We will repeatedly sort an array containing 1000 random values, and then predict how long it will take this method to sort an array containing of 10,000 random values (and actually compare this prediction to the measured running time for this problem size).

1. Because this sorting method is in the $O(n^2)$ complexity class, we simply assume that we can write $T(n) = cn^2$ where we do not know the value of c yet.

2. Wen run the sorting method five times on an array containing 1000 random values and measure the average running time: it is 0.022 seconds.

Now we solve for c. Using n = 1000 we have $T(1000) = c\ 1000^2 \rightarrow 0.022 = c\ 10^6 \rightarrow c = 0.022/10^6 \rightarrow c = 2.2 \times 10^{-8}$. Thus, for large n, $T(n) = 2.2 \times 10^{-8}\ n^2$ seconds. Using this formula, we can predict that using this method to sort an array of 10,000 random values would take about 2.2 seconds. The actually amount of time is about 2.7 seconds. The prediction is 85% accurate. It would be more accurate if we measured this sort on a 10,000 value array and predicted the time to sort a 100,000 value array.

Zeitbedarf bei vergrössertem Problemumfang (3)

For a second example, we will measure, and then predict, the running time of a more complicated log-linear sorting method (this algorithm is in the lowest complexity class for all those that accomplish sorting). We will repeatedly sort an array containing 100,000 random values, and then predict how long it will take this method to sort an array containing of 1,000,000 random values (and actually compare this prediction to the measured running time for this problem size, which is small enough to measure).

1. Because this sorting method is in the $O(n \log_2 n)$ complexity class, we simply assume that we can write $T(n) = c(n \log_2 n)$ where we do not know the value of c yet.

2. We run the sorting method five times on an array containing 100,000 random values and measure the average running time: it is 0.15 seconds.

Now we solve for c. Using n = 100,000 we have $T(100{,}000) = c\ (100{,}000 \log_2 (100{,}000)) \rightarrow 0.15 = c\ 1{,}660{,}964 \rightarrow c = 0.15/1{,}660{,}964 \rightarrow c = 9.0 \times 10^{-8}$. Thus, for large n, $T(n) = 9.0 \times 10^{-8} (n \log_2 n)$ seconds. Using this formula, we can predict that using this method to sort an array of 1,000,000 random values would take 1.79 seconds. The actually amount of time is about 1.8 seconds.

Here is a final word on the accuracy of our predictions. If we sort the exact same array a few times we will see variations of 10%-20%; likewise, we get a slightly greater spread if we sort different arrays (but all of the same size). Our model predicts that these would all take the same amount of time. So, all kinds of things (operating system, what programs it is running, what network connections are open, etc.) influence the actually amount of time taken to sort an array. In this light, the accuracy of our "naïve" predictions is actually quite good.

Bewältigbarer Problemumfang bei schnellerer Maschine

Wenn derzeit Problemumfang M bewältigbar ist, dann könnte eine 10 mal schnellere Maschine (in gleicher Zeit) folgenden Problemumfang M' bewältigen:

f(n)	M'
$\log n$	$2^{10 \log M}$
n	$10\ M$
$n \log n$	fast $10\ M$
n^2	$3.16\ M$
n^3	$2.15\ M$
2^n	$M + 3.3$

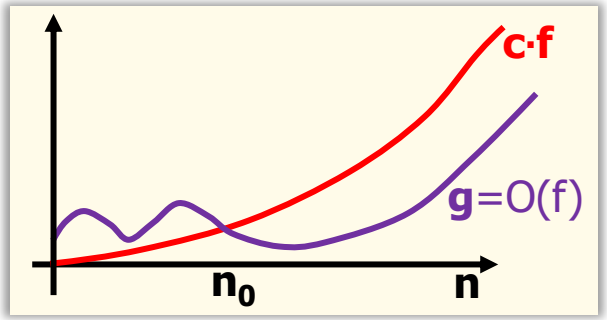
Anzahl der Berechnungsschritte („Laufzeit") bei Problemumfang n

Beispiel: In 2^M Berechnungsschritten kann ein Problem der Grösse M bewältigt werden. Mit der schnelleren Maschine kann man in der gleichen Zeit zehnmal mehr Schritte, also 10×2^M Schritte, ausführen. Welche Problemgrösse M' kann mit so vielen Schritten bewältigt werden? Wir setzen M' als unbekannte, zu bestimmende Variable in die Laufzeitformel $f(n) = 2^n$ ein: $2^{M'} = 10 \times 2^M$. Logarithmieren (zur Basis 2) beider Seiten liefert $M' = \log_2 10 + M \approx 3.3 + M$.

Komplexitätsklassen O(f)

Präzisere Definition von O(f)

- Mit **O(f)** wird jeweils eine ganze Funktionsklasse bezeichnet
  - Genauer: $O(f(n)) = \{ g(n) \mid \exists n_0, c > 0: \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c\, f(n) \}$
- Statt $g \in O(f)$ schreibt man oft salopper (aber falsch!): $g = O(f)$
  - Notation dann z.B.: $g(n) = O(n^2)$ oder kürzer $g = O(n^2)$
  - Interpretation: g wächst höchstens so schnell wie f



- f = **O(1)** bedeutet: f ist beschränkt
  - Überschreitet einen bestimmten konstanten Wert nicht
- Relevant ist auch die Klasse der polynomiellen Funktionen: **POLY(n)** $= \bigcup_{k>0} O(n^k)$
  - Falls $f \in POLY(n)$, dann spricht man von polynomiellem Aufwand (wesentlicher Gegensatz dazu: *exponentieller* Aufwand $O(c^n)$)

Denkübung: Gilt $O(\log n) \subset O(n) \subset O(n^2) \subset O(c^n)$? Oder ist es evtl. genau umgekehrt?

Effiziente und ineffiziente Algorithmen

POLY vs. EXPO

Wir zitieren http://mathwiki.cs.ut.ee/asymptotics/05_polynomial_complexity:

The main aim of computer science is to develop efficient algorithms for different problems. However, the question what is efficient is not so straightforward. Engineers who program low-level operating system routines try to shave off any assembler level instruction […]. The most liberal definition of efficiency is used by theoretical computer scientists, who consider all polynomial time algorithms as efficient.

Many widely used algorithms have polynomial time complexity. Examples of algorithms with non-polynomial time complexity are all kinds of brute-force algorithms that look through all possible configurations. For example, looking through all the subsets of a set of size n takes time $O(2^n)$, looking through all permutations of n elements takes time $O(n!)$.

n! wächst schneller als 2^n, aber langsamer als n^n. → Wikipedia „Stirlingformel"

The decision to declare polynomial algorithms as efficient is motivated by following reasons. First, there is a vast difference between running times of polynomial and exponential algorithms. Secondly, programming tasks seem to have either a polynomial-time algorithms or require exponential $O(2^n)$ time brute-force algorithms. Thirdly, polynomial-time algorithms are closed under superposition. In layman's terms, if an algorithm makes polynomial number of calls to a function that is implemented as a polynomial algorithm, the resulting algorithm has also polynomial time-complexity. This greatly simplifies theoretical analysis of algorithms – you do not have to keep track what is the individual complexity of sub-routines as long as they are polynomial.

In practice, this rule for separating efficient algorithms form inefficient ones is often true, but not always. If your program uses n^{100} seconds or $10^{100}n$ seconds then it runs in polynomial time but it is too slow for any practical purposes even for $n = 2$; on the other hand, an algorithm which takes 1.00000001^n seconds does not run in polynomial time but finishes within a second even for $n = 1{,}000{,}000$. However, determining whether an algorithm has polynomial time complexity is usually much easier than calculating the precise number of steps it makes or estimating the number of seconds it might spend on certain hardware.

Beispiel: Komplexität von Mergesort

- Wir zeigen, dass die „vom Himmel gefallene" Formel $t(n) = n + n \log n$ die Zahl der Schritte angibt

Beweisen muss ich diesen Käs',
sonst ist die Arbeit unseriös.

- **Beweis** einfach, Ansatz mit folgender Rekurrenzgleichung (induktiv)

Lasst uns beginnen

$$t(n) = n + 2\,t(n/2)$$

und Neues gewinnen:

$$= n + 2\,(n/2 + n/2 \log (n/2))$$

Zum andern schreibt man frei heraus

$$= n + n + n \log (n/2)$$

und rechnet damit fröhlich aus:

$$= n + n - n + n \log n$$

Daraus ergibt sich, wie man sieht:

$$= n + n \log n$$

woraus uns Folgendes erblüht:

$$\in O(n \log n)$$

Damit ist unser Satz bewiesen, das wollen wir nun froh begiessen.

n = Aufwand für „merge" von n Elementen

Aufwand für rekursives Sortieren von 2 Mal der Hälfte

Induktionsannahme für n/2: $t(n/2) = n/2 + n/2 \log (n/2)$

Da $\log (n/2) = (-1 + \log n)$ [Logarithmus zur Basis 2]

Damit alles „glatt" geht, nimmt man zweckmässigerweise zunächst an, dass n eine Zweierpotenz ist. (Ansonsten Abschätzung durch nächst grössere Zweierpotenz oder mit einem Ansatz $t(n) = n + t(\lfloor n/2 \rfloor) + t(\lceil n/2 \rceil)$ arbeiten.)

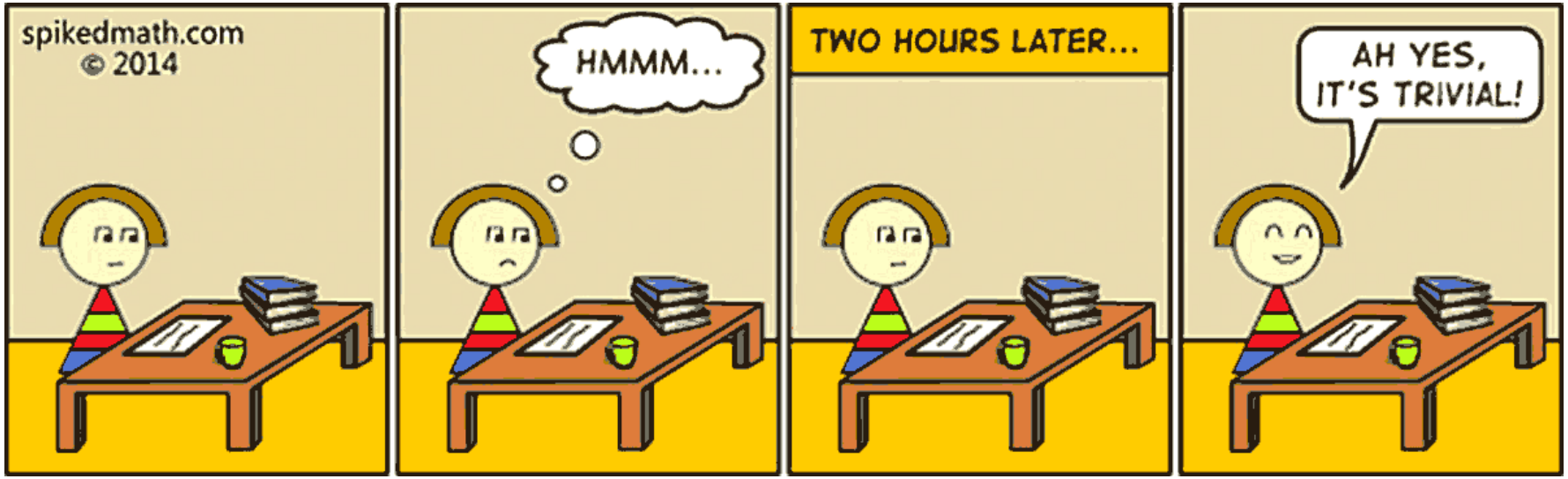
Denkübung: Induktionsanfang?

Nun lasst uns eine Pause machen und über das Erreichte lachen →

Zitate der Reime aus einer Arbeit von Friedrich Wille (1935–1992), „Galerkins Lösungsnäherungen bei monotonen Abbildungen", Mathematische Zeitschrift 127 (1972): 10–16; sie ist durchgehend in Gedichtform im Stil von Wilhelm Busch verfasst.

Einfache Beweise...

La qualité essentielle d'une démonstration est de forcer à croire. -- Pierre de Fermat



http://spikedmath.com/comics/557-Proofs-Part-1.png

"Professor Łojasiewicz from Jagiellonian University (Poland) once showed a proof of one implication in two hours. It was less than a minute until the end of lecture, so he looked at the theorem and said: 'And the other implication is trivial'. The students were too shy to ask the professor why it is trivial, although they didn't see it themselves. Days passed and at an oral exam Prof. Łojasiewicz asked a student to prove that theorem. The student quickly proved one implication and then said: 'and the other implication is trivial'. Łojasiewicz was sitting still for 15 minutes, thinking intensively. Finally, he said: 'You're right, it is trivial' and he gave the student the highest possible mark." [http://spikedmath.com/557.html]

Einfache Beweise...

> "Since the mergesort technique is usually applied in connection with the use of peripheral storage devices, the computational effort involved in the move operations dominates the effort of comparisons often by several orders of magnitude. The detailed analysis of the number of comparisons is therefore of little practical interest." -- Niklaus Wirth

In obigem Beweis der (n log n)-Komplexität von Mergesort haben wir es uns an einigen Stellen etwas einfach gemacht. Was genau z.B. soll denn ein „Schritt" sein?

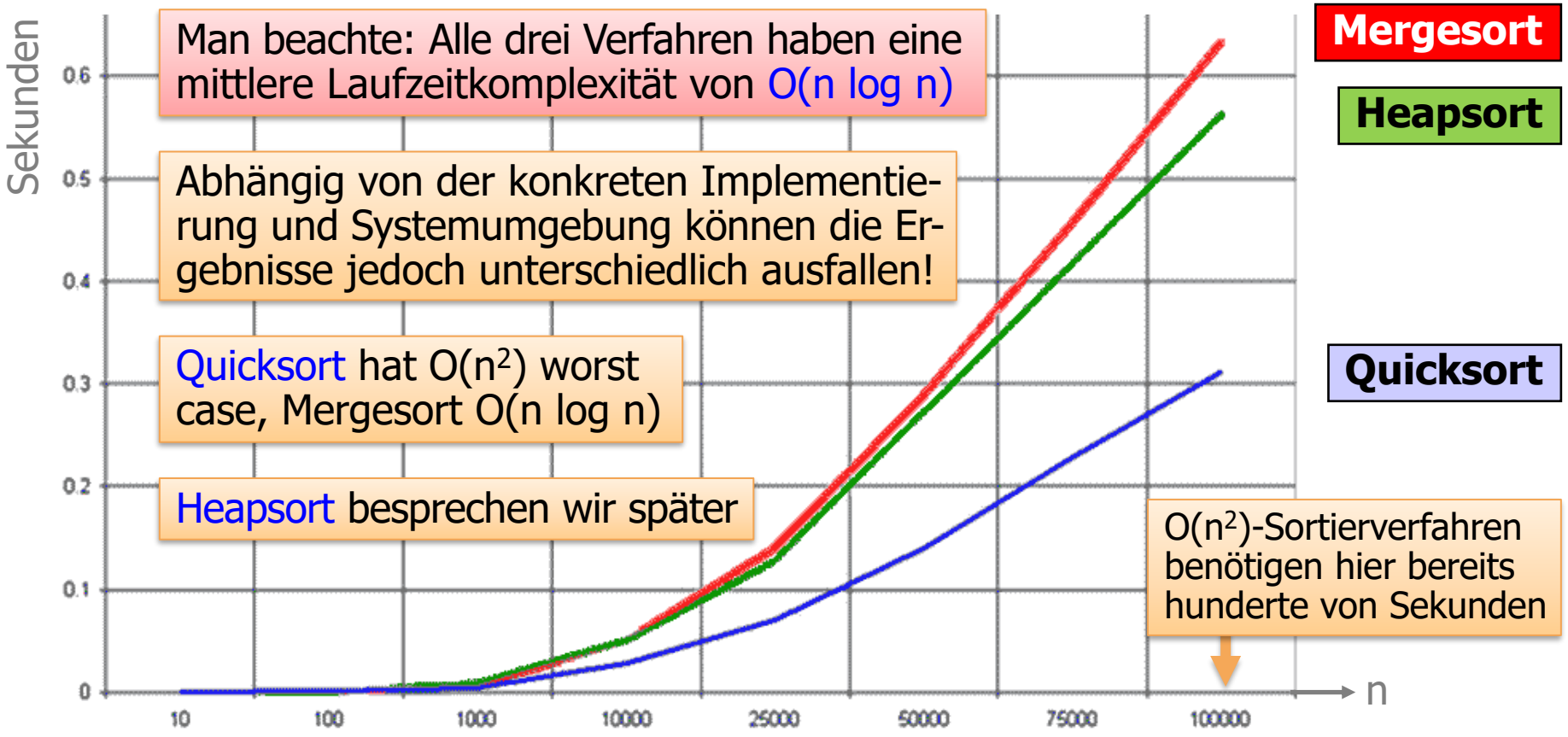
Typischerweise schätzt man für die Laufzeitanalyse als wesentliche Operation die Zahl der Vergleiche zweier Elemente ab. Alle Vergleiche geschehen beim Mergen zweier (Teil)listen. Mit jedem Vergleich entsteht weiterer Aufwand, denn eines der beiden verglichenen Elemente wird dann in die Zielliste übernommen, also typischerweise kopiert. Die Zahl dieser Kopier- oder Zuweisungsinstruktionen ist jedoch durch die Zahl der Vergleichsoperationen begrenzt; anders gesagt, kann man Vergleichen und Kopieren zu einem einzigen „Schritt" zusammenfassen. Läuft eine der beiden Teillisten leer, kann man die restlichen Elemente der anderen Teilliste „unbesehen" übernehmen – man spart sich dann also einige Vergleichsoperationen, nicht aber Kopierinstruktionen. Das Mergen zweier Teillisten mit insgesamt n Elementen benötigt also zwar höchstens n-1 Vergleiche, aber eben doch immer n Kopierinstruktionen; der Ansatz „n Schritte" ist daher so gesehen eine adäquate Modellierung des Aufwands.

Eine konkrete Implementierung wird ausser der Vergleichsabfrage, etwa in der Form

```
if (array[indexLeft] < array[indexRight])… ,
```

sowie den Kopierinstruktionen und je nachdem, ob Top-down- und Bottom-up-Mergesort realisiert wird und ob rekursiv oder iterativ vorgegangen wird, auch noch Anweisungen zur Erhöhung von Indizes, while-Schleifen mit daraus compilierten Maschineninstruktionen zum Test der Abbruchbedingung, Anweisungen zum Generieren einer Hilfsliste, internen Aufwand beim (ggf. rekursiven) Aufruf von Methoden etc. enthalten – all dies lässt sich jedoch entweder unter die Vergleichs- oder Kopieroperationen subsumieren oder fällt grössenordnungsmässig nur n-mal oder 1-mal an, kann so gesehen also vernachlässigt werden.

Empirischer Vergleich dreier Sortierverfahren



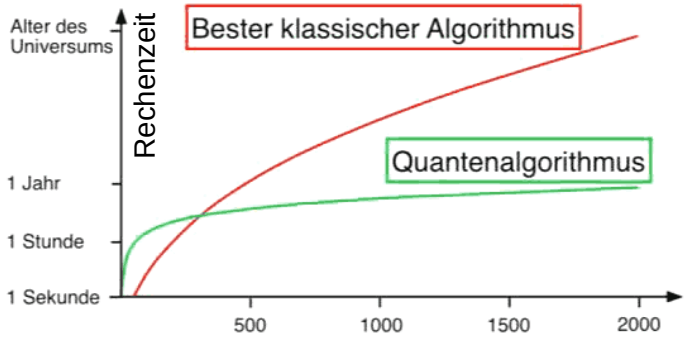
„…möchte ich nicht verschweigen, dass einige Informatiker mit einem Augenzwinkern behaupten, es gäbe keinen Unterschied zwischen O(n) und O(n log n). Die Argumentation ist recht einfach: Unsere Erde hat geschätzt 6×10^{49} Atome. Mehr Objekte werden ganz sicher nie zu sortieren sein. Der Zweierlogarithmus dieser wahrlich astronomischen Zahl beträgt trotzdem nur knapp schnöde 166. Das liesse sich doch quasi als Konstante ansehen.“ – Jens Gallenbacher

Komplexität von Sortieren

- Es gilt (hier ohne Beweis), dass das Sortieren von n Elementen ein *Problem* mit Zeitkomplexität O(n log n) ist
  - Unter gewissen allgemeinen Annahmen (dass z.B. über den Wertebereich der Elemente a priori gar nichts bekannt ist)
- Das heisst, dass z.B. Mergesort (grössenordnungsmässig) ein optimaler Algorithmus für das Sortierproblem ist
  - → Es gibt keinen „wesentlich" besseren Sortieralgorithmus!

- Aber vielleicht hilft ja Parallelität?
- Oder ein Quantencomputer??

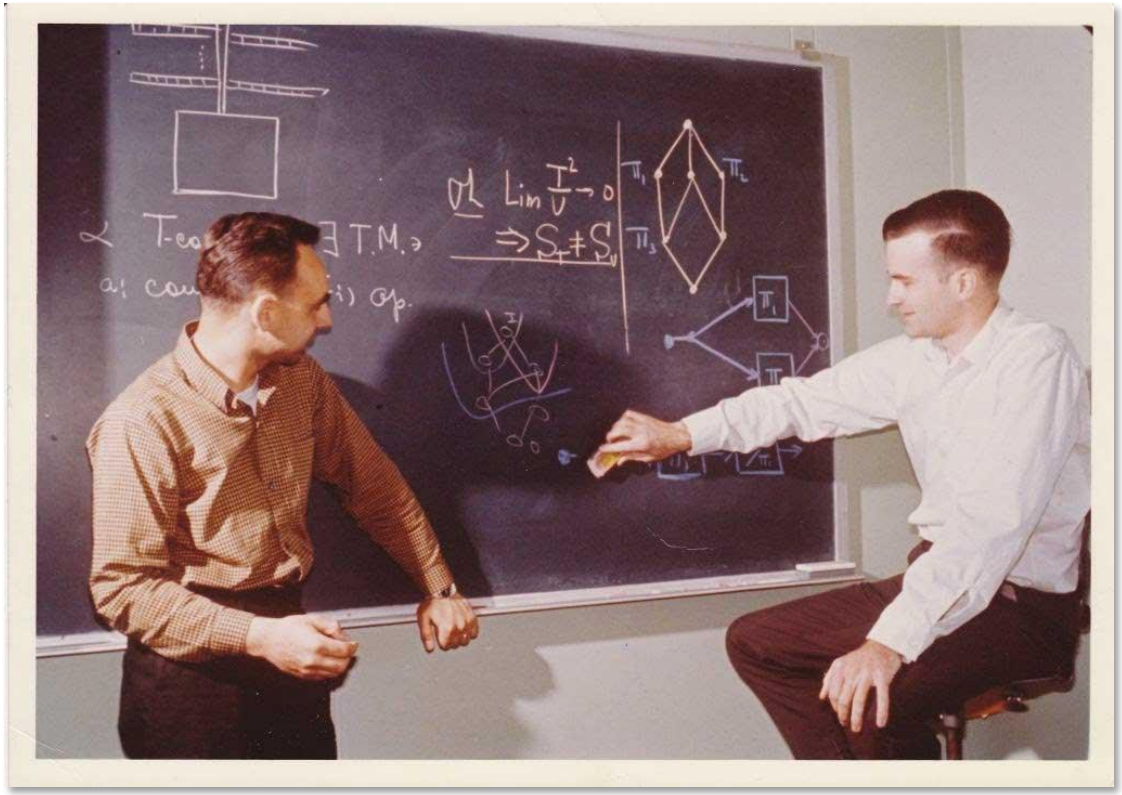
Nun ja: Mit Quantencomputern sollten z.B. Brute-Force-Suchverfahren nur noch $2^{n/2}$ statt 2^n Schritte benötigen. Aber wie ein Quantencomputer funktioniert, das lernen wir hier nicht. Und ob man jemals einen brauchbaren bauen wird, das wissen wir nicht.



Komplexitätstheorie

"Everything was in ruins except that science was still functioning. At that time I was going to be a scientist. It was one of those untouched beautiful things that existed in the ruins." -- Juris Hartmanis über die Nachkriegszeit, die er als Flüchtling aus Lettland in Deutschland erlebte.

Dass viele kombinatorische Probleme offenbar oft nicht viel besser als durch ein Backtracking-Verfahren mit exponentieller Komplexität gelöst werden können, war eine Beobachtung, die irritierte: Könnte man das beweisen? Oder geht es vielleicht doch irgendwie effizienter?



http://blog.computationalcomplexity.org/2015/05/fiftieth-anniversary-of-publication-of.html

Juris Hartmanis und Richard Stearns 1963; ihr wegweisender Artikel "On the Computational Complexity of Algorithms" von 1965 gab dem Gebiet seinen Namen; die Autoren erhielten 1993 den Turing Award.

Gauß fand für das 8-Damen-Problem keinen effizienteren Ansatz, aber erst der Logiker Kurt Gödel (1906 – 1978) formuliert Mitte der 1950er-Jahre (in einem Brief an John von Neumann) dies als konkrete Frage („wie stark im allgemeinen bei finiten kombinatorischen Problemen die Anzahl der Schritte gegenüber dem blossen Probieren verringert werden kann"), was später als „P-NP-Problem" formaler ausgedrückt wurde. Die intensive Beschäftigung mit dieser Frage und damit verwandter Aspekte begründete ab den späten 1960er-Jahren die Komplexitätstheorie und machte sie zu einem Hauptbereiche der Theoretischen Informatik.

Zur interessanten Lebensgeschichte von Juris Hartmanis → https://amturing.acm.org/pdf/HartmanisTuringTranscript.pdf

Komplexitätstheorie (2)

Auf die fundamentaleren Erkenntnisse und Fragen der Komplexitätstheorie können wir hier nicht eingehen; wir beschliessen das Kapitel mit einem Zitat aus dem zuvor schon erwähnten Buch „Planet der Algorithmen" von Sebastian Stiller, der das zugrundeliegende Phänomen charmant als „algorithmische Schwerkraft" bezeichnet. Sein Hinweis auf die innewohnende „Macht" ist nicht übertrieben, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die moderne Kryptographie, und damit die Informationssicherheit, wesentlich auf der Komplexitätstheorie beruht.

„Komplexitätstheorie ist die Frage, wie viel Umstände es jeden Algorithmus, jedes präzise Schlussfolgern kostet, eine Frage zu lösen, weil dieser Aufwand nicht eine Schwäche des Algorithmus, sondern essenziell für das Problem ist. Die Komplexität eines Problems zu verstehen, geht Hand in Hand mit der Forschung an passenden Algorithmen. Wer versteht, was zu hoffen und was unmöglich ist, kann besser nach dem richtigen Algorithmus suchen.

Gibt es schwierige Fragen? Oder ist jede Frage nur eine Frage des Aufwands und des Genies, mit dem man sich ihr nähert? Sind manche Fragen in einem allgemeinen Sinn schwieriger als andere? Gibt es Fragen, die niemand herausbekommt – kein Genie, kein Algorithmus, kein Supercomputer? Gibt es eine Grenze, jenseits derer Rätsel unlösbar werden? Eine Grenze nicht nur hier und heute, nicht nur für mich als einzelnen Menschen, sondern für das, was ich tue, für mein Schlussfolgern? [...]

Eine wirklich schwierige Frage formulieren zu können, etwas erschaffen zu können, das kein anderer lösen kann, ist eine äusserst praktische Fähigkeit. Darin liegt Macht."

Resümee des Kapitels

- Aufwand von Algorithmen
  - Asymptotische Zeitkomplexität
  - O-Notation: Komplexitätsklassen O(*f(n)*)
  - O(…)-Beispiele aus Algorithmen der Vorlesung
  - Mergesort: Induktiver Beweis der O(n log n)–Zeitkomplexität