

# Das Märchen von der verteilten Terminierung

[F. Mattern - Informatik-Spektrum 8:6, pp. 342-343, 1985]

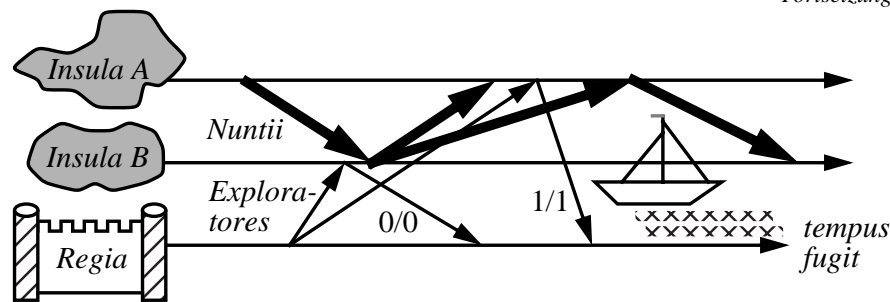
Als einst der König von Polymikronien merkte, dass die Zeit gekommen war, sein aus unzähligen Inseln bestehendes Reich gerecht unter seinen Enkelkindern aufzuteilen, sandt er Botschaften an die weit über das Land verteilt lebenden Weisen aus, auf dass diese ihm einen klugen Vorschlag unterbreiten mögen.

Wohl wusste der König um den eigenwilligen aber steten Lebenswandel seiner Ratgeber, welche den ganzen Tag nichts taten, als zu essen und zu denken: War einer von ihnen bei Speis und Trank, so konnte alleine eine königliche Botschaft oder eine Nachricht eines anderen Weisen ihn zum Denken anregen - er griff meist sogleich zu Feder, Papier, Tinte und Siegel, um einigen übrigen Mitgliedern des so weit verteilten königlichen Konsiliums eine neue Weisheit zuzusenden. Hungrig vom Denken wandt er sich alsbald wieder der stets fürstlich gedeckten Tafel zu.

Als indes die Jahre vergingen und der König immer älter wurde, ohne dass er von den Weisen einen Rat erhalten hätte, seufzte er, schickte nach seinem geheimen Hofrat und sprach zu ihm: "Ich weiss wohl, wie schwierig ein gerechter Plan zur Aufteilung meines Erbes ist, und ich kenne die Regeln meines Konsiliums, wonach man mir erst kundtut, wenn die königliche Sache so erschöpfend beraten wurde, dass ein jeder der Weisen zufrieden ist und keine Botschaft mehr unterwegs ist. Alleine die königliche Post bereitet mir Sorge - ist etwa ein Schiff in den Stürmen der Meere gesunken oder hat sich ein Bote in der Weite des Reiches verirrt?"

"Oh königliche Hoheit", entgegnete der geheime Hofrat und sprach weiter: "Unermesslich gross ist Euer Reich, und gar lange brauchen die Segler, um von einem Eiland zu einem anderen zu gelangen. Rein niemand vermag die Zeit vorher abzuschätzen, und es wird sogar berichtet, dass in der ein oder anderen Nacht ein Postboot ein anderes überholt. Aber die Segelkünste der Seefahrer, die hohe Schule der Schiffsbaumeister und die pflichtbewusste Ergebenheit Eurer Diener sorgen dafür, dass nicht eine einzige Botschaft verloren gehen kann. Lasset uns also Kundschafter aussenden, mein König, um jeden Ratgeber zu befragen, wieviele Botschaften er empfangen und versandt hat. So können wir leicht Gewissheit darüber erlangen, ob summa summarum so viele Nachrichten versandt wie empfangen wurden und das Konsilium des Königs Sache abschliessend beraten hat."

Fortsetzung--->



# Übungen (2) zur Vorlesung "Verteilte Algorithmen"...

- Man beweise die Korrektheit des im Märchen beschriebenen "Doppelzählverfahrens" zur Feststellung der verteilten Terminierung.
- Man beweise die Korrektheit des Echo-Algorithmus:
  - der Initiator terminiert erst, wenn alle Knoten informiert wurden ("safety"),
  - nach endlicher Zeit terminiert der Initiator ("liveness").

Überlegen Sie sich, was für Beweistechniken Sie einsetzen können (Invarianten, Induktion...) und wie genau / formal die Spezifikation des Algorithmus sein sollte, damit Sie im Beweis formal argumentieren können. Geben Sie ggf. eine formale Spezifikation des Algorithmus an.

---> Fortsetzung Märchen

Der König war hoch erfreut über diese weisen Worte, schöpfte neue Zuversicht und beauftragte sogleich den Hofmathematicus, einen Plan auszuarbeiten. Dieser erschien alsbald mit einer grossen Leinwand und sprach: "Majestät, auf diesem Szenario seht Ihr, dass des Hofrats Plan versagen kann - die zu den Eilanden A und B gesandten Kundschafter berichten, dass so viele Botschaften empfangen wie versandt wurden - summa summarum nur eine Botschaft. Nichtsdestotrotz sind noch Nachrichten unterwegs. Die Sache ist wohl so, dass die Kundschafter sehr klug vorgehen müssen, um sich nicht täuschen zu lassen und des Königs Zählung zu verfälschen, alldieweil wir primo die Uhr noch nicht erfinden konnten und somit auch keine einheitliche Reichszeit haben, secundo wir den Rundfunk noch nicht kennen und tertio die ehrwürdigen Sitten es verbieten, dass die Weisen an einem gemeinsamen Ort zusammenkommen." Der König war erstaunt über die gar wundersamen Worte und meinte: "Nun, das weiss ich wohl, denn ich bin der König. Was also rät Er mir ?" "Hoheit, mein Plan sieht vor, die Kundschafter erneut auszusenden, sobald der letzte bei Hofe eingetroffen ist. Wird alsdann das Ergebnis genau bestätigt und sind die Summen gleich, so ist keine Nachricht mehr unterwegs." "Vortrefflich", meinte der König, der nichts verstanden hatte. "Kümmere Er sich nur sogleich um die Instruktion der Kundschafter!"

Der Hofmathematicus tat wie befohlen, verbesserte seinen Plan noch verschiedentlich, und bald waren die Kundschafter mit allen königlichen Vollmachten versehen auf den besten Seglern des Reiches unterwegs zu den Weisen.

Als endlich der Schluss der Weisen bei Hofe eintraf, war der König so voll Glück, dass er den Hofmathematicus bald darauf zu seinem ersten Hofinformaticus ernannte. Und dieser forschte, wenn er nicht gestorben ist, noch heute in einem stillen Turm des königlichen Palastes... an einer noch besseren Lösung zum Problem der verteilten Terminierung!

Papier war kostbar - so verzichtete der Hofinformaticus leider darauf, einen Korrektheitsbeweis seines Planes niederzuschreiben. Einer Randbemerkung seiner Schriften entnehmen wir, dass er später ein Verfahren ersann, bei dem nicht in jedem Fall die Inseln zwei- oder mehrfach von den Kundschaftern aufgesucht werden müssen. Desweiteren gelang es ihm offenbar, die Zahl der notwendigen Kundschafterfahrten durch eine einfache Funktion der Zahl der Inseln und Botschaften zu beschränken. Leider reichte wiedereinander der Rand zur Darstellung der Methode nicht aus. Wer hilft mit bei der

# Zeitkomplexität

Beachte: Algorithmen i.a. nichtdeterministisch --> *mehrere* mögl. Berechnungen!

*Variable Zeitkomplexität* eines vert. Algorithmus =  
max. "Zeit" aller Berechnungen des Algo unter:  
Z1: Lokale Berechnungen erfolgen in Nullzeit  
Z2: Eine Nachricht benötigt *maximal* 1 Zeiteinheit

*Einheitszeitkomplexität* eines vert. Algorithmus =  
max. "Zeit" aller Berechnungen des Algo unter:  
E1: Lokale Berechnungen erfolgen in Nullzeit  
E2: Eine Nachricht benötigt *exakt* 1 Zeiteinheit

## Behauptung:

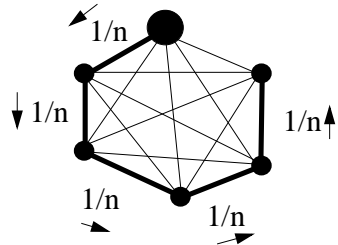
Es gilt *nicht* immer  $\text{variable Zeitkplx} \leq \text{Einheitszeitkplx}$ .

- Grund: Einheitszeitkplx erlaubt nicht alle Berechnungen!
- Frage: Gilt Umkehrung?

Bsp. Echo-Algorithmus auf vollständigem Graph

- (1) Einheitszeitkomplexität = 3
- (2) Variable Zeitkomplexität  $\geq n$

Phase 1: Alle werden rot  
Phase 2: Alle bis auf Initiator werden grün  
Phase 3: Initiator wird grün



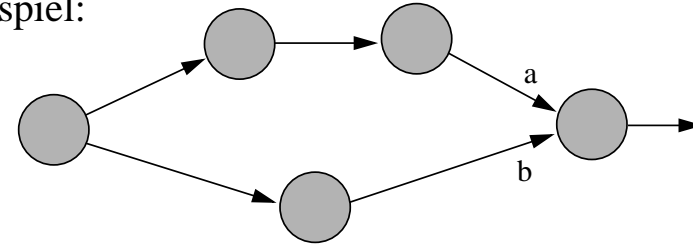
- Explorer "aussen":  $1/n$  Zeiteinheiten  
- Jede sonstige Nachricht 1 Zeiteinheit  
- Entarteter Baum Tiefe  $n-1$  nach einer Zeiteinheit aufgebaut  
- Echo beim Initiator nach  $n$  Einheiten

# Zeitkomplexität: Welche Definition?

- *Einheitsztkplx*: Einige Berechnungen bleiben unberücksichtigt!

↑  
Nicht bei var. Ztkplx! (Wieso?)  
↑  
unwahrscheinliche?

Beispiel:



Trifft a vor b ein --> sehr lange Berechnung, sonst terminiert

↑  
mag vielleicht in 10% aller Fälle der Fall sein...

↑  
aber wie oft wirklich?

↑  
systemabhängig!

- *Variable Ztkplx*: Resultat wird u.U. durch extrem unwahrscheinliche Berechnungen bestimmt
- Für worst-case: variable Ztkplx? Aber: average case?
- Genauer: Wahrscheinlichkeitsverteilung --> Erwartungswert
  - systemabhängig
  - schwierig
  - jeden Tag anders...