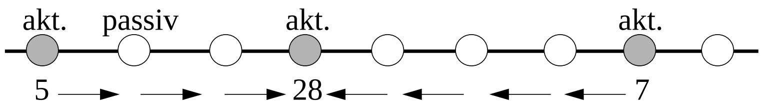
Peterson's Election-Algorithmus (1. Variante)

- Prinzip analog zum Hirschberg / Sinclair - Verfahren: Anzahl aktiver Knoten pro "Phase" mindestens halbieren
    - bidirektionaler Ring
    - anfangs sind alle *aktiv*
    - *passive* Knoten reichen nur noch Nachrichten weiter ("relay")

- Idee: Pro Phase bekommt ein Knoten die Identitäten seiner rechten und linken *noch aktiven* Nachbarn...

Vgl. dies mit iterierter Anwendung des Algorithmus für Nachbarschaftswissen!



...und überlebt nur, wenn er der grösste *aller drei* ist!

Im Unterschied zu Hirschberg / Sinclair gibt es keine Echos / Vetos!

- Ein Überlebender bleibt aktiv und startet eine neue Phase: Sendet seine Identität in beide Richtungen (Initial tun das alle Initiatoren)

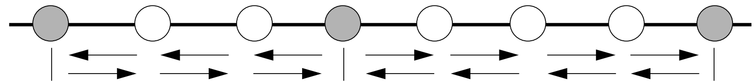
- *Gewonnen*, wenn die eigene Identität empfangen wird

Beachte: In obigem Beispiel wird die 5 von der 28 "passiviert". Bald darauf (in der nächsten Phase) erhält die 5 erneut eine Nachricht "28", um diese weiterzuleiten. Hätte die 5 nicht gleich beim ersten Mal die "28" einfach weiterleiten sollen, so dass Knoten 28 die Nachricht nicht erneut über die Strecke 28 --> 5 senden muss? (Vgl. Chang/Roberts!) Nein! Knoten 5 weiss nicht, ob die 28 die gegenwärtige Phase tatsächlich überlebt - dann wäre die Nachricht "28" fälschlicherweise weitergeleitet worden!

Zeitkomplexität des Algorithmus als Übung (dominiert auch hier die letzte Phase?)

Nachrichtenkomplexität

- Pro Phase laufen 2 Nachrichten über *jede* Kante
    - für global *synchrone Phasen* leicht einsichtig
    - aber auch für nicht synchronisierte Phasen richtig!



- Wenn ein Knoten Phase i überlebt, überlebt sein "linker" aktiver Nachbar diese Phase nicht!

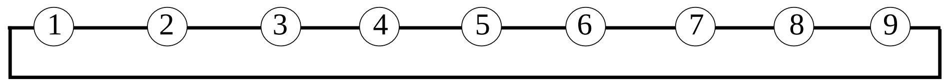
    --> max. $\log_2 n$ Phasen

    --> max. $2 n \log_2 n$ Nachrichten

"in jeder Phase überlebt einer von *dreien*" ist *falsch* - wieso?

- wie sieht eine Anordnung aus, bei der *maximal viele* Nachrichten entstehen?

- *Sortierte Anordnung*: jeweils durch "rechten" Nachbarn eliminiert, ausgenommen grösster Knoten im Ring



--> in diesem Fall nur 2 Phasen ==> 4n Nachrichten!
(beachte Terminierungserkennung!)

- Mittlere Nachrichtenkomplexität:
    - für jeden Knoten Wahrscheinlichkeit 1/3, Phase zu überleben (wieso?)
    - also im Mittel $\log_3 n$ Phasen

    --> $2 n \log_3 n \approx 1.26 n \log_2 n \approx 1.82 n \ln n$ Nachrichten

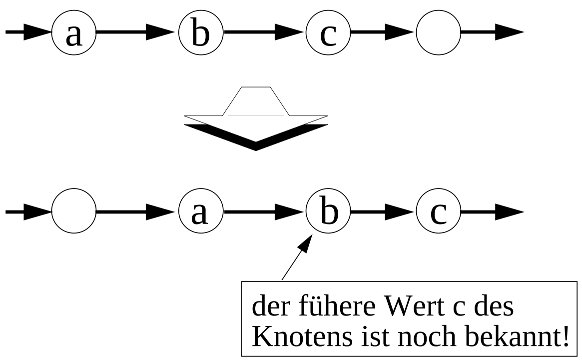
Variante für unidirektionale Ringe

- Man glaubte zunächst, dass ein Election-Algorithmus auf *unidirektionalen* Ringen mindestens $O(n^2)$ Nachrichten im Worst-case-Fall benötigt

- Das stimmt nicht: Der Peterson-Algorithmus lässt sich auf unidirektionalen Ringen *simulieren*!

---

1. "Shift" in Ringrichtung um eine Position bzgl. aktiver Knoten:



2. Nun kann (der neue) Knoten a an seinen Nachbarn b seinen Wert senden - damit kennt b sowohl a als auch c

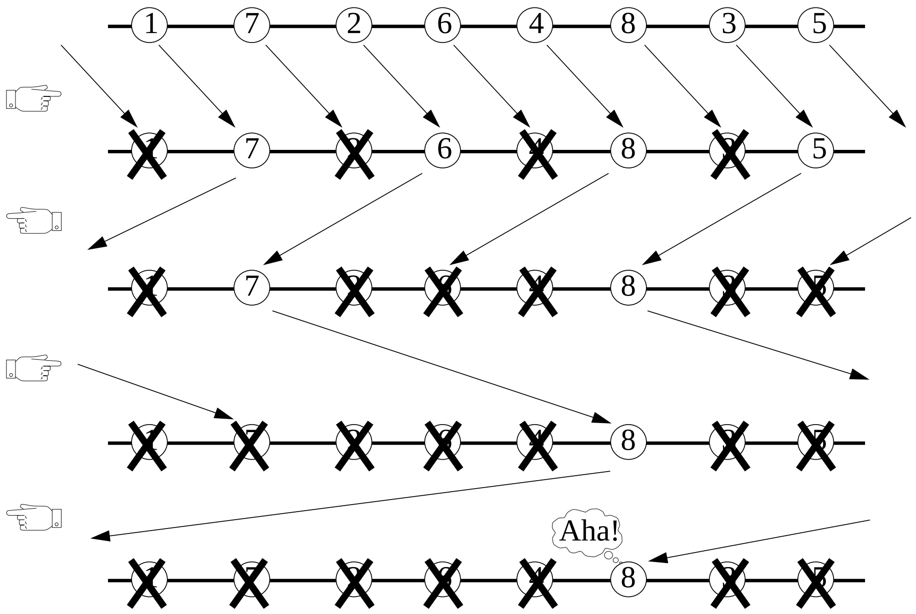
(als hätte b Nachrichten von a und c erhalten!)

Damit kostet eine solche Phase global auch nur 2n Nachrichten!

Peterson's Election-Algorithmus (2. Variante)

- Idee einer Optimierung:
  - anstatt sich mit beiden Nachbarn "gleichzeitig" zu vergleichen, sollte ein Knoten sich nur dann mit seinem anderen Nachbarn vergleichen, wenn er den ersten Vergleich gewonnen hat

- Phasen im / gegen den Uhrzeigersinn wechseln sich ab:



  - lässt sich auch wieder unidirektional simulieren!
  - in jeder Phase werden n Nachrichten gesendet (passive Knoten: "relay")

- Denkübungen:

  1) Wie kann man auch bei asynchronen Nachrichten und nicht gleichzeitigem Start der Knoten "eine Art" global getakteter Phasen erreichen?

  2) Man formuliere den Algorithmus aus "Sicht eines Knotens": Wie reagiert ein Knoten auf das Eintreffen einer bestimmten Nachricht?

  3) Man mache sich Gedanken zur Abschätzung der worst-case und der average-case Nachrichtenkomplexität!

Nachrichtenkomplexität

- Behauptung:

Basis $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$

Für die *Anzahl der Phasen* r gilt: $r \leq \log_\varphi n + O(1)$

==> Anzahl der Nachrichten $\leq 1.44\, n \log_2 n + c$

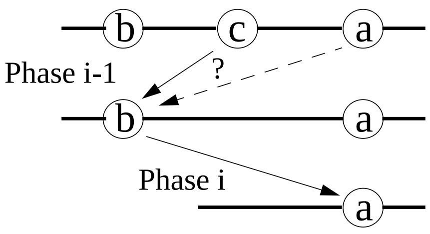
- Lemma: $a_i \leq a_{i-2} - a_{i-1}$ (für i > 1)

Def: Anzahl Überlebender von Phase i

Anzahl der "Opfer" von Phase i-1

Bew.: Betrachte zwei benachbarte Knoten a, b in Phase i

Gab es einen Knoten zwischen a und b in Phase i-1?



(1) a überlebe Phase i
==> a > b

(2) b hat Phase i-1überlebt
==> b > c

(1) und (2) ==> $a \neq c$

Also muss es ein c geben, das in Phase i-1 Opfer wurde

Hier: a hat seinen linken Nachbarn in der vorherigen Phase verloren

==> Für jeden Überlebenden in Phase i (hier: a) gibt es mindestens ein Opfer (hier: c) in Phase i-1 □

- Aus $a_i \leq a_{i-2} - a_{i-1}$ folgt $a_{i-2} \geq a_{i-1} + a_i$, also $a_i \geq a_{i+1} + a_{i+2}$

- Ferner gilt $a_{r-1} = 1 = \mathrm{Fib}(2)$
$a_{r-2} \geq 2 = \mathrm{Fib}(3)$

$a_{r-3} \geq a_{r-2} + a_{r-1} \geq \mathrm{Fib}(2)+\mathrm{Fib}(3) = \mathrm{Fib}(4)$

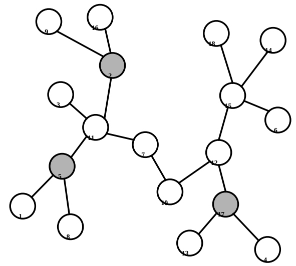
- Also: $n = a_0 \geq \mathrm{Fib}(r+1)$

--> Ungleichung nach r auflösen!
Weil Fib exponentiell zur Basis φ wächst ($\mathrm{Fib}(k) \approx \varphi^k / \sqrt{5}$), folgt die Behauptung

Election auf Bäumen

- Geht dies besser / effizienter als z.B. mit dem Message-extinction-Prinzip für allg. Graphen?

- Und im Vergleich zu den Verfahren auf Ringen?



- Explosionsphase:
  - Election-Ankündigung wird zu den Blättern propagiert

flooding!

- Kontraktionsphase
  - von aussen zum "Zentrum" das Maximum propagieren

0 für unbeteiligte Knoten

- Informationsphase (notw.?)
  - Zentrum informiert alle Knoten über Gewinner

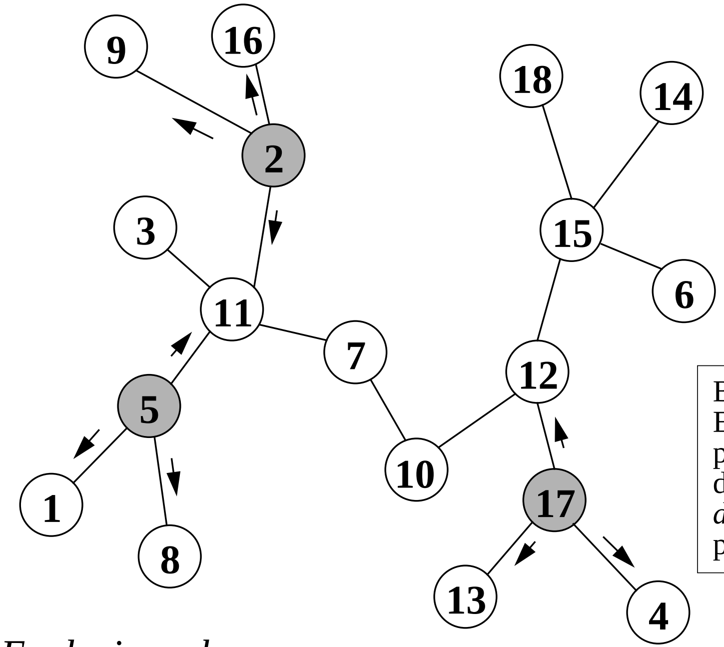
flooding!

- Explosionsphase kann an mehreren Stellen "zünden"

- "Vereinigung" der Explosionsphasen

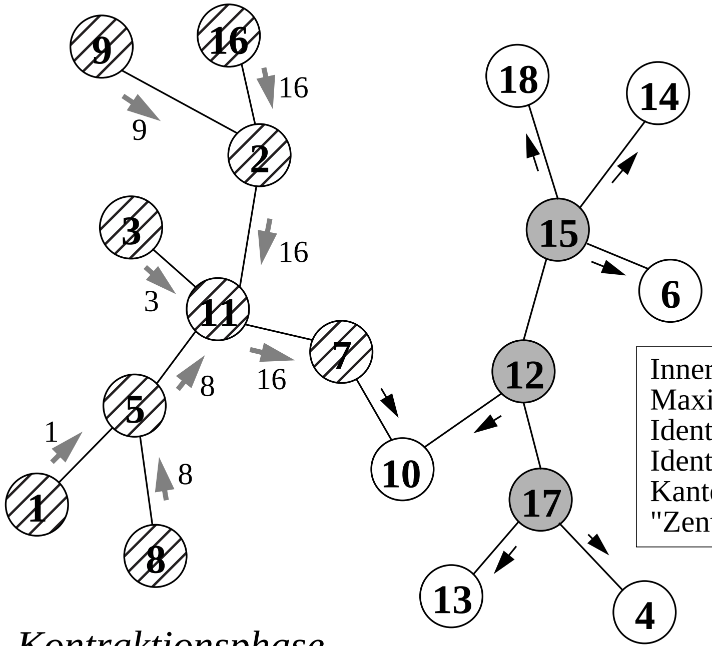
- Ggf. Teile in Explosionsphase während andere Teile schon in Kontraktionsphase

- Zentrum ist nicht determiniert



Bei erstmaligem Erhalt einer Explosionsnachricht diese in alle *anderen* Richtungen propagieren

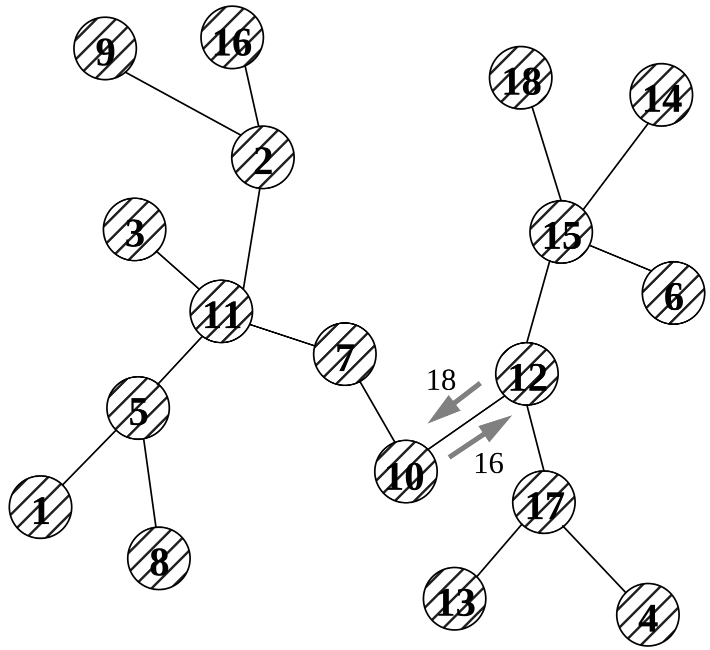
Explosionsphase



Blätter *reflektieren* Explosionsnachricht durch eine Kontraktionsnachricht

Innere Knoten senden Maximum aus erhaltenen Identitäten und eigener Identität über die "letzte" Kante in Richtung "Zentrum"

Kontraktionsphase



- Begegnung zweier Kontraktionsnachrichten auf (genau) einer Kante im Zentrum
- Die beiden Knoten wissen, dass sie nun das Maximum kennen
- Sie können dies nun ggf. per flooding verbreiten (Informationsphase)
- Terminierung der flooding-Phase (falls notwendig) einfach durch erneute Reflexion / Kontraktion ("indirektes acknowledge")

Nachrichtenkomplexität von Baumelection

Folgender Satz / Beweis ist *falsch* - wieso?

Beh.: Der Baumelection-Algorithmus hat bei *einem* Initiator und n Knoten die Komplexität m(n) = 2n - 2
(ohne Berücksichtigung der Informationsphase)

Beweis induktiv:

1) n=1 --> m(1) = 0 ✓ (offensichtlich korrekt)

2) Schritt von n auf n+1:

- Füge an einen Baum aus n Knoten ein Blatt an; über die neue Kante fliessen genau 2 Nachrichten
- Also: m(n+1) = m(n)+2 = 2n-2+2 = 2(n+1)-2 ✓

- wo genau liegt der Fehler?
- korrekter Wert der Nachrichtenkomplexität --> nächste Folie!

Nachrichtenkomplexität

(1) Explosionsphase: n-2+k

Anzahl der Initiatoren

- es gibt k-1 Begegnungskanten von Explosionsnachrichten

(2) Kontraktionsphase: n

- über alle Kanten eine Nachricht, nur über die Zentrumskante zwei

(3) Informationsphase: n-2

- keine Nachricht über die Zentrumskante

$\boxed{\sum = 3n + k - 4}$ (mit Information aller Knoten)

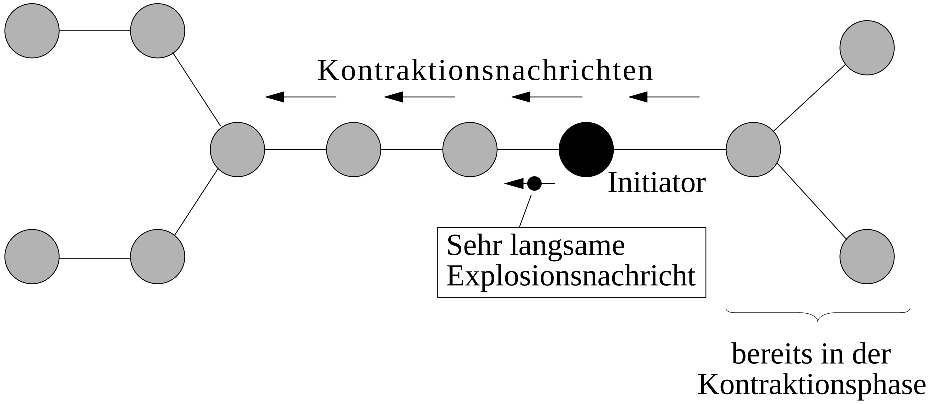
--> 3(n-1) für k=1

--> 4(n-1) für k=n

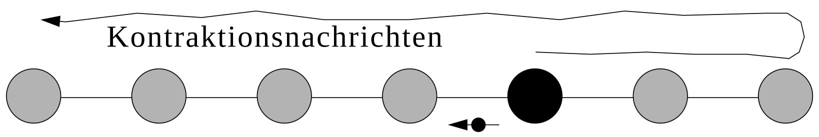
- Wesentlich effizienter als Ringe!
- Wieso? (Ringe sind symmetrischer!)
- Wieso Verfahren nicht "einfach" auf Ringe anwenden?

(eine Kante entfernen)

Schaden Nachrichtenüberholungen?



- Kann eine Kontraktionsnachricht eine Explosions-nachricht überholen?
- Muss man das vermeiden?
- Lassen sich vielleicht sogar z.T. Nachrichten durch Zusammenfassen (Explosions / Kontraktion) sparen?

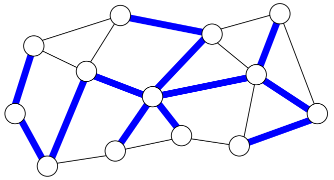


- Wie würde in diesem Fall das Ende erkannt?

Election auf allgemeinen Graphen

zusammenhängend

- Wieso versagt folgende einfache Idee für allg. Graphen?
  - verwende den Echo-Algorithmus, um einen (einzigen) Spannbaum zu konstruieren
  - führe dann Election auf diesem Baum aus



- Wie wäre es damit:
  - jeder Initiator startet seinen eigenen Echo-Algorithmus, mit dem er (über die Echo-Nachrichten) die grösste Identität erfährt
  - jeder Initiator weiss somit, ob er der grösste ist oder nicht und kennt auch den grössten
  - vgl. dies mit dem "bully-Algorithmus" für Ringe: jeder macht einen vollständigen (!) Ringdurchlauf und prüft dabei, ob er der grösste ist
  - ist das korrekt?
  - effizient?

"Echo-Election" für allgemeine Graphen

zusammenhängend mit bidirekt. Kanten

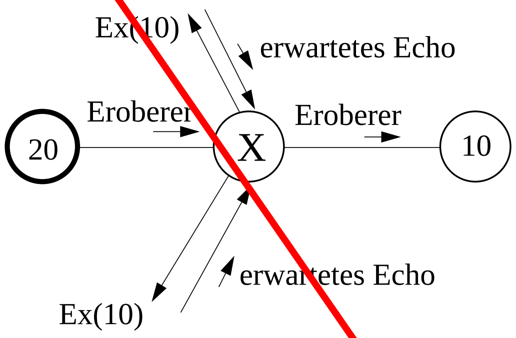
- *Generelle Idee*: Chang / Roberts-Algorithmus (also "message exctinction"), jedoch *Echo-Algorithmus* anstelle des zugrundeliegenden Ring-Verfahrens

- Also:
  - Jeder Initiator startet "seinen" Echo-Algorithmus
  - Explorer und Echos führen die Identität des Initiators mit
  - Schwächere Nachrichten (Explorer und Echos) werden "verschluckt" (d.h. nicht weitergegeben)
  - Stärkste Welle setzt sich überall durch (und informiert so neben dem Gewinner auch alle Verlierer)
  - Alle anderen Wellen stagnieren irgendwo endgültig (zumindest der Gewinner sendet keine Echos für diese Wellen --> kein anderer Initiator bekommt jemals ein Echo)

- *Veranschaulichung*: "Gleichzeitiges" Einfärben des Graphen mit verschieden dominanten Farben
- Man vgl. das Verfahren mit dem anfangs geschilderten Verfahren, bei dem die Terminierungserkennung fehlt!
- Vermutung bzgl. der worst-case und der average-case Nachrichtenkomplexität?

Varianten, z.B. "Adoption"

- Idee: Stärkerer Knoten ("Eroberer") läuft nicht besiegten Explorern hinterher, sondern "adoptiert" dessen Echos



Beispiel: Knoten X wird erst von 10, dann von 20 erobert.

Eroberer-Nachrichten (= Explorer des stärkeren) laufen "direkt" in Richtung des gegnerischen Initiatorknotens

- Kommt statt erwartetem Echo dann ein fremder Eroberer:
  - Fremder > : verloren, dieser erobert nun...
  - Fremder < : Jetzt doch Explorer in diese Richtung senden, da der "Vasall" offenbar nicht stark genug war, um sich durchzusetzen

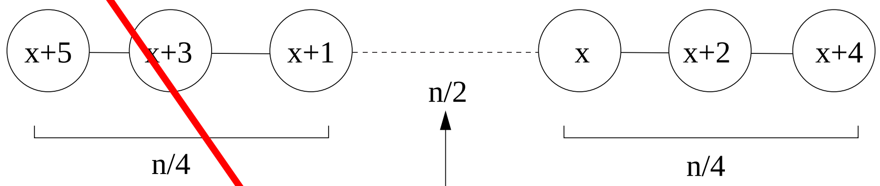
---

- *Eigenschaften* dieser Variante:
  - Nur ein einziges Echo pro Knoten (das ist oft praktisch!) (Interpretation: "Verschiedene" Echo-Wellen vereinigen sich)
  - Nicht jeder Knoten wird über seinenMisserfolg informiert (Gewinner kann aber über "seinen"Baum eine Informationswelle starten)

- Es sind noch einige andere Varianten denkbar...

Nachrichtenkomplexität von Echo-Election

- *Worst-case* Nachrichtenkomplexität ist $O(n^2)$



Strecke kann u.U. von jedem der n/2 skizzierten Initiatoren durchlaufen werden (wenn diese geeignet zeitversetzt "zünden")

- *Mittlere* Nachrichtenkomplexität ist O(e log k)

Anzahl der Initiatoren

Hier nur *Beweisskizze:*

- Ein Knoten wird im Mittel $H_k \approx \log k$ mal erobert (--> Anzahl der Rekorde!)
- Eroberter Knoten sendet e/n Nachrichten im Mittel (Explorer und Echos)
  --> $n\, H_k\, (e/n) \;=\; e\, H_k$ Nachrichten insgesamt.

- Bemerkungen:

  - Empirische Untersuchungen zeigen, dass die Adoptionsvariante bei typischen Graphen und mehreren Initiatoren ca. 30% - 50% derNachrichten spart. (Bei nur einem Initiator sind die Verfahren identisch!)
  - Es gibt Verfahren mit geringerer worst-case Nachrichtenkomplexität, diese sind allerdings um einiges aufwendiger!

Nachrichtenkomplexität: untere Schranke

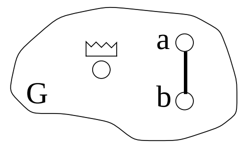
Satz: *Die Nachrichtenkomplexität für das Election-Problem in allg. Graphen beträgt mindestens* $\Omega(\underbrace{e + n \log n}_{\text{was dominiert typischerweise?}})$

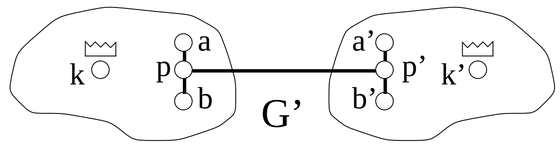
Beweis: *n log n* ist untere Grenze, da der Satz auch für Ringe gilt (vgl. dortigen Satz ohne Beweis)

Also noch zu zeigen: <u>*e* ist untere Schranke</u>

Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gäbe einen Election-Algorithmus A, der weniger als e Nachrichten für einen Graphen G benötigt ==> es gibt eine Kante $\overline{ab}$, über die *keine Nachricht* fliesst

Konstruiere dann G' aus zwei Kopien von G (mit unterschiedlichen Identitäten aber der gleichen relativen Ordnung) so, dass diese mit einer Kante $\overline{pp'}$ verbunden werden (p bzw. p' werden in die unbenutzten Kanten $\overline{ab}$ bzw. $\overline{a'b'}$ neu eingefügt)





Da zwischen den beiden Teilen keine Nachricht ausgetauscht wird, gewinnen u.U. *zwei* Prozesse k, k'!

Beachte bei diesem Beweis:

- bei Anwendung von Algorithmus A auf G' kann sich jeder Knoten genauso wie der enstprechende im Graphen G verhalten
- die Knoten haben (weder in G noch in G') ein "globales Wissen": sie kennen nicht die Struktur oder Gesamtgrösse des Graphen, sie kennen nicht die Identitäten ihrer Nachbarn
- die Knoten wissen insbesondere nicht, ob Situation G oder G' vorliegt
- Knoten p und p' seien keine Initiatoren
- bzgl. der Knotenidentitäten wird nur vorausgesetzt, dass auf diesen eine lineare Ordnung definiert ist (nicht, dass es sich um Nummern handelt)