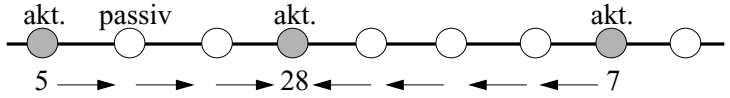
Peterson's Election-Algorithmus (1. Variante)

- Prinzip analog zum Hirschberg/Sinclair-Verfahren: Anzahl aktiver Knoten pro "Phase" mindestens halbieren
  - bidirektionaler Ring
  - anfangs sind alle *aktiv*
  - *passive* Knoten reichen nur noch Nachrichten weiter ("relay")

- Idee: Pro Phase bekommt ein Knoten die Identitäten seiner rechten und linken *noch aktiven* Nachbarn...

Vgl. dies mit iterierter Anwendung des Algorithmus für Nachbarschaftswissen!



...und überlebt nur, wenn er der grösste *aller drei* ist!

Im Unterschied zu Hirschberg / Sinclair gibt es keine Echos / Vetos!

- Ein Überlebender bleibt aktiv und startet eine neue Phase: Sendet seine Identität in beide Richtungen
  (Initial tun das alle Initiatoren)

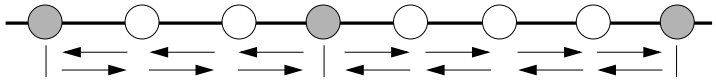
- *Gewonnen*, wenn die eigene Identität empfangen wird

Beachte: In obigem Beispiel wird die 5 von der 28 "passiviert". Bald darauf (in der nächsten Phase) erhält die 5 erneut eine Nachricht "28", um diese weiterzuleiten. Hätte die 5 nicht gleich beim ersten Mal die "28" einfach weiterleiten sollen, so dass Knoten 28 die Nachricht nicht erneut über die Strecke 28 → 5 senden muss? (Vgl. Chang/Roberts!) Nein! Knoten 5 weiss nicht, ob die 28 die gegenwärtige Phase tatsächlich überlebt - dann wäre die Nachricht "28" fälschlicherweise weitergeleitet worden!

Zeitkomplexität des Algorithmus als Denkübung
(dominiert auch hier die letzte Phase?)

Nachrichtenkomplexität

- Pro Phase laufen 2 Nachrichten über *jede* Kante
  - für global *synchrone Phasen* leicht einsichtig
  - aber auch für nicht synchronisierte Phasen richtig!



- Wenn ein Knoten Phase i überlebt, überlebt sein "linker" aktiver Nachbar diese Phase nicht!

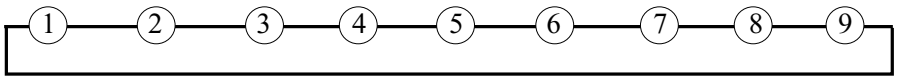
  → max. $\log_2 n$ Phasen

  → max. $2 n \log_2 n$ Nachrichten

"in jeder Phase überlebt einer von *dreien*" ist *falsch* - wieso?

- wie sieht eine Anordnung aus, bei der *maximal viele* Nachrichten entstehen?

- *Sortierte Anordnung*: jeweils durch "rechten" Nachbarn eliminiert, ausgenommen grösster Knoten im Ring



→ in diesem Fall nur 2 Phasen ⇒ 4n Nachrichten!
(beachte Terminierungserkennung!)

- Mittlere Nachrichtenkomplexität:
  - ein Knoten überlebt eine Phase mit Wahrscheinlichkeit 1/3
  - es gibt also im Mittel $\log_3 n$ Phasen

  → $2 n \log_3 n \approx 1.26 n \log_2 n \approx 1.82 n \ln n$ Nachrichten

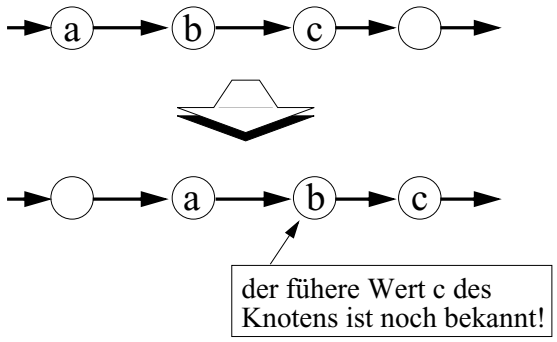
Variante für unidirektionale Ringe

- Man glaubte zunächst, dass ein Election-Algorithmus auf *unidirektionalen* Ringen mindestens $O(n^2)$ Nachrichten im Worst-case-Fall benötigt

- Das stimmt nicht: Der Peterson-Algorithmus lässt sich auf unidirektionalen Ringen *simulieren*!

---

1. "Shift" in Ringrichtung um eine Position bzgl. aktiver Knoten:



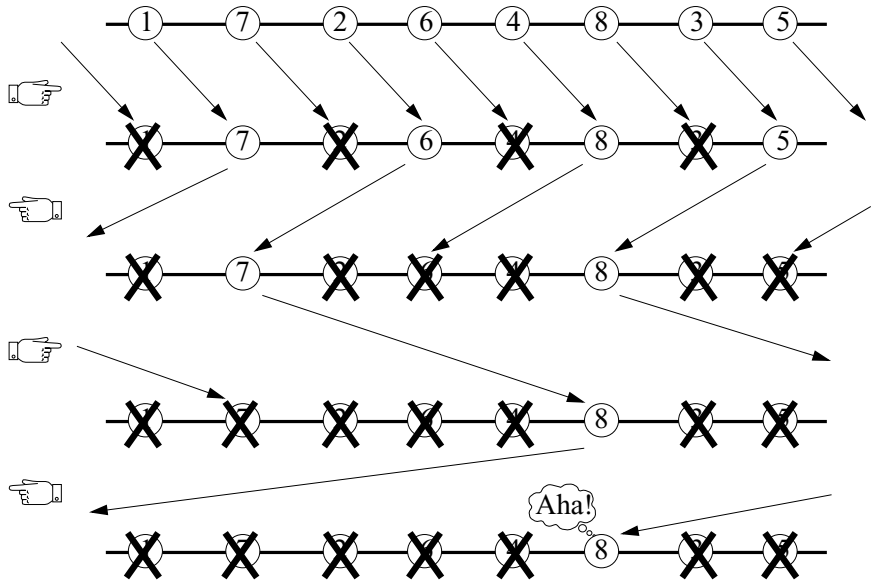
2. Nun kann (der neue) Knoten a an seinen Nachbarn b seinen Wert senden - damit kennt b sowohl a als auch c
(als hätte b Nachrichten von a und c erhalten!)

Damit kostet eine solche Phase global auch nur 2n Nachrichten!

Peterson's Election-Algorithmus (2. Variante)

- Idee einer Optimierung:
  - anstatt sich mit beiden Nachbarn "gleichzeitig" zu vergleichen, sollte ein Knoten sich nur dann mit seinem anderen Nachbarn vergleichen, wenn er den ersten Vergleich gewonnen hat

- Phasen im / gegen den Uhrzeigersinn wechseln sich ab:



  - lässt sich auch wieder unidirektional simulieren!
  - in jeder Phase werden n Nachrichten gesendet (passive Knoten: "relay")

- Denkübungen:
  1) Wie kann man auch bei asynchronen Nachrichten und nicht gleichzeitigem Start der Knoten "eine Art" global getakteter Phasen erreichen?
  2) Man formuliere den Algorithmus aus "Sicht eines Knotens": Wie reagiert ein Knoten auf das Eintreffen einer bestimmten Nachricht?
  3) Man mache sich Gedanken zur Abschätzung der worst-case und der average-case Nachrichtenkomplexität!

Nachrichtenkomplexität

- **Behauptung:**
  Für die *Anzahl der Phasen* r gilt: $r \leq \log_\varphi n + O(1)$
  ⇒ Anzahl der Nachrichten $\leq 1.44\, n \log_2 n + c$

Basis $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$

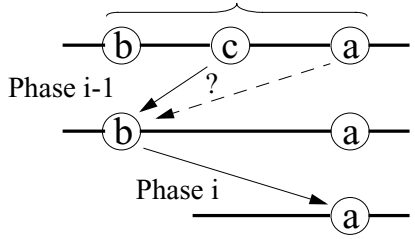
- **Lemma:** $a_i \leq a_{i-2} - a_{i-1}$ (für $i > 1$)

Def: Anzahl Überlebende von Phase i

Anzahl der "Opfer" von Phase i-1

Bew.: Betrachte 2 benachbarte Knoten a, b zu Beginn von Phase i

Gab es einen Knoten zwischen a und b in Phase i-1?



(1) a überlebe Phase i
⇒ a > b

(2) b hat Phase i-1 überlebt
⇒ b > c

(1) und (2) ⇒ a ≠ c

Also muss es ein c geben, das in Phase i-1 Opfer wurde
Hier: a hat seinen linken Nachbarn in der vorherigen Phase verloren

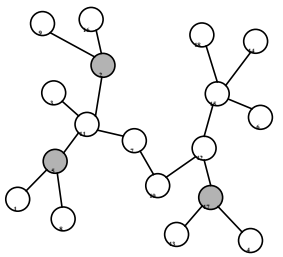
⇒ Für jeden Überlebenden in Phase i (hier: a) gibt es mindestens ein Opfer (hier: c) in Phase i-1 □
(Also: Pro "Doppelphase" mindestens Halbierung der Knotenzahl)

- Aus $a_i \leq a_{i-2} - a_{i-1}$ folgt $a_{i-2} \geq a_{i-1} + a_i$, also $a_i \geq a_{i+1} + a_{i+2}$
- Ferner gilt $a_{r-1} = 1 = Fib(2)$, $a_{r-2} \geq 2 = Fib(3)$ } $a_{r-3} \geq a_{r-2} + a_{r-1} \geq Fib(2)+Fib(3) = Fib(4)$
- Also: $n = a_0 \geq Fib(r+1)$ → Ungleichung nach r auflösen!

Weil Fib exponentiell zur Basis φ wächst ($Fib(k) \approx \varphi^k / \sqrt{5}$), folgt die Behauptung

Election auf Bäumen

- Geht dies besser / effizienter als z.B. mit dem Message-extinction-Prinzip für allg. Graphen?
- Und im Vergleich zu den Verfahren auf Ringen?



- Explosionsphase:
  - Election-Ankündigung wird zu den Blättern propagiert

flooding!

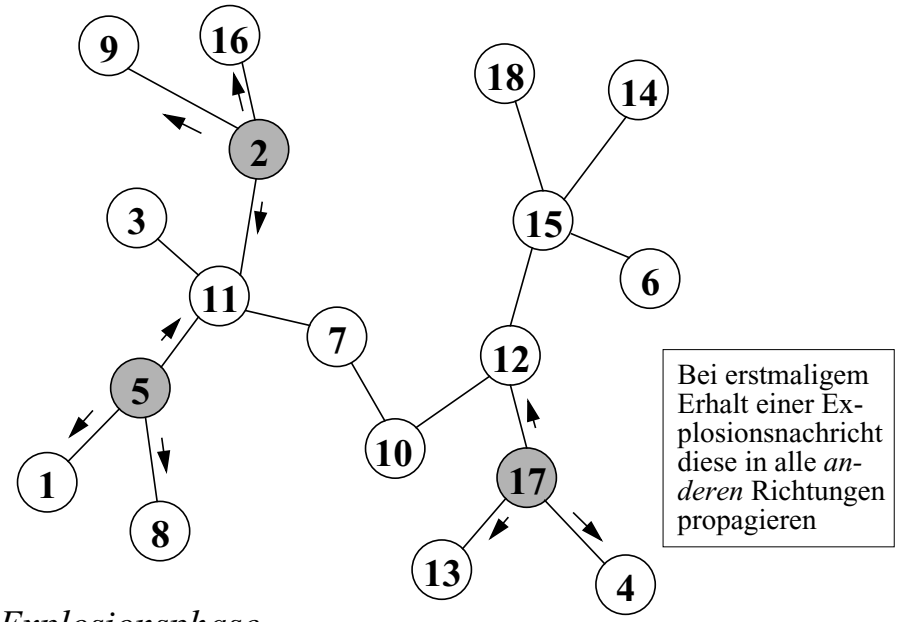
- Kontraktionsphase
  - von aussen zum "Zentrum" das Maximum propagieren

0 für unbeteiligte Knoten

- Informationsphase (notw.?)
  - Zentrum informiert alle Knoten über Gewinner

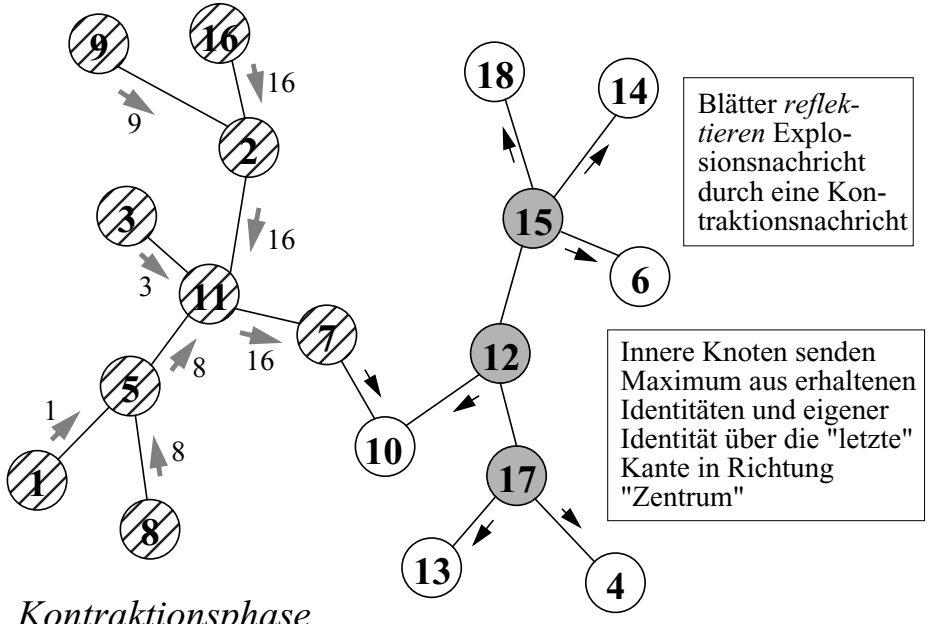
flooding!

- Explosionsphase kann an mehreren Stellen "zünden"
- "Vereinigung" der Explosionsphasen
- Ggf. Teile in Explosionsphase während andere Teile schon in Kontraktionsphase
- Zentrum ist nicht determiniert



Bei erstmaligem Erhalt einer Explosionsnachricht diese in alle *anderen* Richtungen propagieren

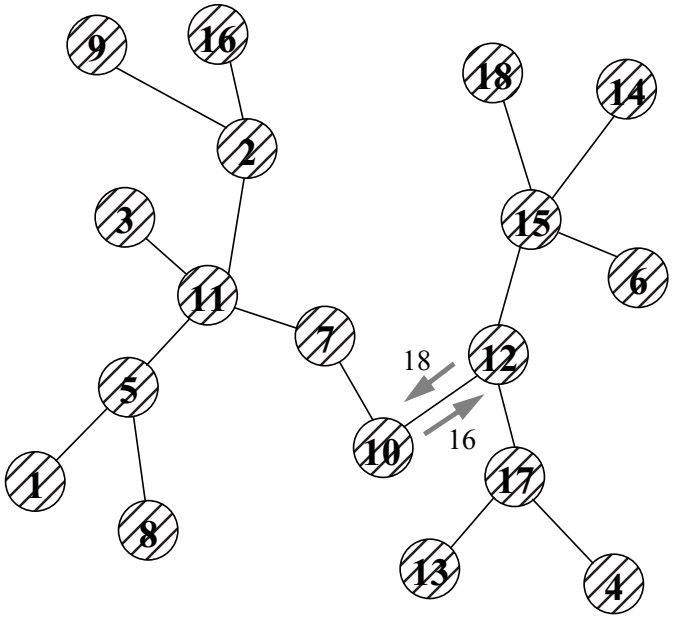
Explosionsphase



Blätter *reflektieren* Explosionsnachricht durch eine Kontraktionsnachricht

Innere Knoten senden Maximum aus erhaltenen Identitäten und eigener Identität über die "letzte" Kante in Richtung "Zentrum"

Kontraktionsphase



- Begegnung zweier Kontraktionsnachrichten auf (genau) einer Kante im Zentrum
- Die beiden Knoten wissen, dass sie nun das Maximum kennen
- Sie können dies nun ggf. per flooding verbreiten (Informationsphase)
- Terminierung der flooding-Phase (falls notwendig) einfach durch erneute Reflexion / Kontraktion ("indirektes acknowledge")

Nachrichtenkomplexität von Baumelection

Folgender Satz / Beweis ist *falsch* - wieso?

Beh.: Der Baumelection-Algorithmus hat bei *einem* Initiator und n Knoten die Komplexität m(n) = 2n - 2
(ohne Berücksichtigung der Informationsphase)

Beweis induktiv:

1) n=1 --> m(1) = 0 ✓ (offensichtlich korrekt)

2) Schritt von n auf n+1:

- Füge an einen Baum aus n Knoten ein Blatt an; über die neue Kante fliessen genau 2 Nachrichten
- Also: m(n+1) = m(n)+2 = 2n-2+2 = 2(n+1)-2 ✓

- wo genau liegt der Fehler?
- korrekter Wert der Nachrichtenkomplexität --> nächste Folie!

Nachrichtenkomplexität

(1) Explosionsphase: n-2+k

Anzahl der Initiatoren

- es gibt k-1 Begegnungskanten von Explosionsnachrichten

(2) Kontraktionsphase: n

- über alle Kanten eine Nachricht, nur über die Zentrumskante zwei

(3) Informationsphase: n-2

- keine Nachricht über die Zentrumskante

$\Sigma = 3n + k - 4$ (mit Information aller Knoten)

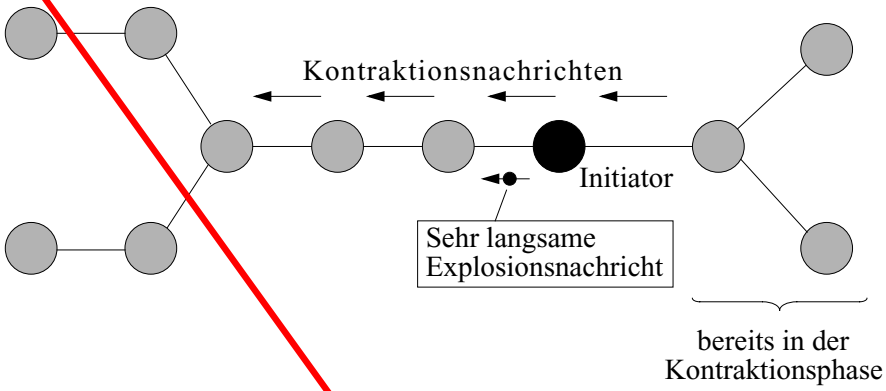
$\rightarrow 3(n-1)$ für k=1

$\rightarrow 4(n-1)$ für k=n

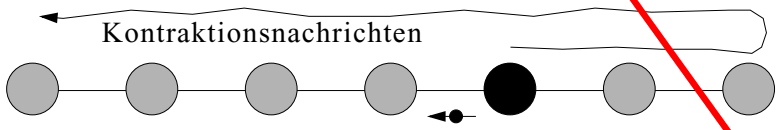
- Wesentlich effizienter als Ringe!
- Wieso? (Ringe sind symmetrischer!)
- Wieso Verfahren nicht "einfach" auf Ringe anwenden?

(eine Kante entfernen)

Schaden Nachrichtenüberholungen?



- Kann eine Kontraktionsnachricht eine Explosions-nachricht überholen?
- Muss man das vermeiden?
- Lassen sich vielleicht sogar z.T. Nachrichten durch Zusammenfassen (Explosions / Kontraktion) sparen?

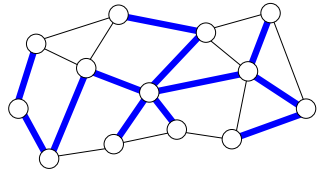


- Wie würde in diesem Fall das Ende erkannt?

Election auf allgemeinen Graphen

zusammenhängend

- Wieso versagt folgende einfache Idee für allg. Graphen?
  - verwende den Echo-Algorithmus, um einen (einzigen) Spannbaum zu konstruieren
  - führe dann Election auf diesem Baum aus



- Wie wäre es damit:
  - jeder Initiator startet seinen eigenen Echo-Algorithmus, mit dem er (über die Echo-Nachrichten) die grösste Identität erfährt
  - jeder Initiator weiss somit, ob er der grösste ist oder nicht und kennt auch den grössten
  - vgl. dies mit dem "bully-Algorithmus" für Ringe: jeder macht einen vollständigen (!) Ringdurchlauf und prüft dabei, ob er der grösste ist
  - ist das korrekt?
  - effizient?

"Echo-Election" für allgemeine Graphen

zusammenhängend mit bidirekt. Kanten

- *Generelle Idee*: Chang / Roberts-Algorithmus (also "message exctinction"), jedoch *Echo-Algorithmus* anstelle des zugrundeliegenden Ring-Verfahrens

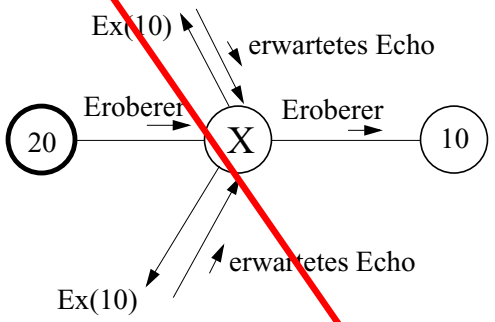
- Also:
  - Jeder Initiator startet "seinen" Echo-Algorithmus
  - Explorer und Echos führen die Identität des Initiators mit
  - Schwächere Nachrichten (Explorer und Echos) werden "verschluckt" (d.h. nicht weitergegeben)
  - Stärkste Welle setzt sich überall durch (und informiert so neben dem Gewinner auch alle Verlierer)
  - Alle anderen Wellen stagnieren irgendwo endgültig (zumindest der Gewinner sendet keine Echos für diese Wellen → kein anderer Initiator bekommt jemals ein Echo)

- *Veranschaulichung*: "Gleichzeitiges" Einfärben des Graphen mit verschieden dominanten Farben

- Vermutung bzgl. der worst-case und der average-case Nachrichtenkomplexität?

Varianten, z.B. "Adoption"

- Idee: Stärkerer Knoten ("Eroberer") läuft nicht besiegten Explorern hinterher, sondern "adoptiert" dessen Echos



Beispiel: Knoten X wird erst von 10, dann von 20 erobert.

Eroberer-Nachrichten (= Explorer des stärkeren) laufen "direkt" in Richtung des gegnerischen Initiatorknotens

- Kommt statt erwartetem Echo dann ein fremder Eroberer:
  - Fremder > : verloren, dieser erobert nun...
  - Fremder < : Jetzt doch Explorer in diese Richtung senden, da der "Vasall" offenbar nicht stark genug war, um sich durchzusetzen

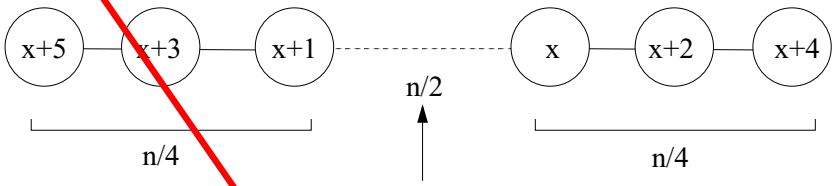
---

- *Eigenschaften* dieser Variante:
  - Nur ein einziges Echo pro Knoten (das ist oft praktisch!) (Interpretation: "Verschiedene" Echo-Wellen vereinigen sich)
  - Nicht jeder Knoten wird über seinen Misserfolg informiert (Gewinner kann aber über "seinen"Baum eine Informationswelle starten)

- Es sind noch einige andere Varianten denkbar...

Nachrichtenkomplexität von Echo-Election

- *Worst-case* Nachrichtenkomplexität ist $O(n^2)$



Strecke kann u.U. von jedem der n/2 skizzierten Initiatoren durchlaufen werden (wenn diese geeignet zeitversetzt "zünden")

- *Mittlere* Nachrichtenkomplexität ist $O(e \log k)$

Anzahl der Initiatoren

Hier nur *Beweisskizze:*

- Ein Knoten wird im Mittel $H_k \approx \log k$ mal erobert (--> Anzahl der Rekorde!)
- Eroberter Knoten sendet e/n Nachrichten im Mittel (Explorer und Echos)
  --> n H_k (e/n) = e H_k Nachrichten insgesamt.

- Bemerkungen:
  - Empirische Untersuchungen zeigen, dass die Adoptionsvariante bei typischen Graphen und mehreren Initiatoren ca. 30% - 50% derNachrichten spart. (Bei nur einem Initiator sind die Verfahren identisch!)
  - Es gibt Verfahren mit geringerer worst-case Nachrichtenkomplexität, diese sind allerdings um einiges aufwendiger!

Nachrichtenkomplexität: untere Schranke

Satz: *Die Nachrichtenkomplexität für das Election-Problem in allg. Graphen beträgt mindestens* $\Omega(e + n \log n)$

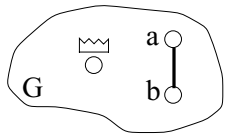
was dominiert typischerweise?

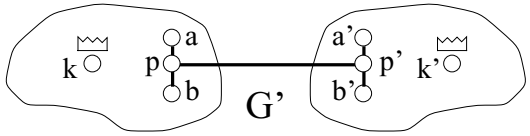
Beweis: *n log n* ist untere Grenze, da der Satz auch für Ringe gilt (vgl. dortigen Satz ohne Beweis)

Also noch zu zeigen: *e* ist untere Schranke

Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gäbe einen Election-Algorithmus A, der weniger als e Nachrichten für einen Graphen G benötigt
⇒ es gibt eine Kante $\overline{ab}$, über die *keine Nachricht* fliesst

Konstruiere dann G' aus zwei Kopien von G (mit unterschiedlichen Identitäten aber der gleichen relativen Ordnung) so, dass diese mit einer Kante $\overline{pp'}$ verbunden werden (p bzw. p' werden in die unbenutzten Kanten $\overline{ab}$ bzw. $\overline{a'b'}$ neu eingefügt)





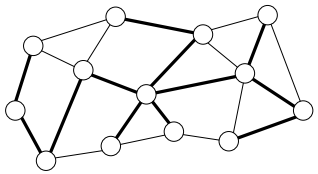
Da zwischen den beiden Teilen keine Nachricht ausgetauscht wird, gewinnen u.U. *zwei* Prozesse k, k'!

Beachte bei diesem Beweis:

- bei Anwendung von Algorithmus A auf G' kann sich jeder Knoten genauso wie der entsprechende im Graphen G verhalten
- die Knoten haben (weder in G noch in G') ein "globales Wissen": sie kennen nicht die Struktur oder Gesamtgrösse des Graphen, sie kennen nicht die Identitäten ihrer Nachbarn
- die Knoten wissen insbesondere nicht, ob Situation G oder G' vorliegt
- Knoten p und p' seien keine Initiatoren
- bzgl. der Knotenidentitäten wird nur vorausgesetzt, dass auf diesen eine lineare Ordnung definiert ist (nicht, dass es sich um Nummern handelt)

Verteilte Spannbaumkonstruktion?

- Gegeben: Zusammenhängendes Netz (mit bidir. Kanten)
- Alle Knotenidentitäten seien verschieden
- Bestimmung eines spannenden Baumes ist oft wichtig:



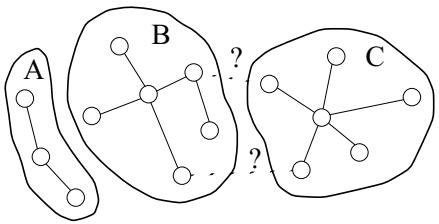
- z.B. um entlang dieses Baumes Information zu verteilen und einzusammeln
- Routing ist wesentlich einfacher, wenn Zyklen ausgeschlossen sind

---

Problem: - Wer initiiert die Spannbaumkonstruktion?
- Basteln alle Initiatoren am gleichen Baum?
(Problem: Zyklenbildung trotz Dezentralität vermeiden!)

- *Lösung 1*: Election, Gewinner startet Echo-Algorithmus
(bzw. Variante Echo-Election: Die Echos bilden bereits einen Spannbaum)

- *Lösung 2*: Dezentral werden Fragmente gebildet, die wachsen und sich nach und nach vereinigen



- Initial: Jeder Knoten ist ein Fragment
- Algorithmus von Gallager, Humblet, Spira (GHS) 1983 mit 2e + 5 n log n Nachrichten (im Detail nicht ganz einfach, hier nicht weiter behandelt)
- Problem: Sparsam mit Nachrichten umgehen!

Election und Spannbaumkonstruktion

Beh.: Election und Spannbaumkonstruktion sind in allgemeinen Netzen vergleichbar schwierige Probleme:

Präziser: Sei C_e die Nachrichtenkomplexität des Election-Problems, und C_t diejenige des Spannbaum-Problems:

(a) Es gilt für C_t: $C_t \leq C_e + 2e$ (wg. obiger "Lösung 1")

(b) Es gilt für C_e: $C_e \leq C_t + O(n)$ (wg. Kplx. Baumelection)

Interpretation:

(a) Hat man mittels Election einen "leader" bestimmt, lässt sich ein eindeutiger Spannbaum einfach ermitteln

(b) Hat man einen Spannbaum, dann lässt sich ein "leader" einfach (d.h. effizient) bestimmen

Hierbei wird 2e bzw. O(n) als "klein" gegenüber C_e und C_t angesehen

---

Aus der unteren Schranke $\Omega(e + n \log n)$ für die Nachrichtenkomplexität des Election-Problems folgt aus (b):

Das Spannbaum-Problem hat eine Nachrichtenkomplexität von mindestens $\Omega(e + n \log n)$

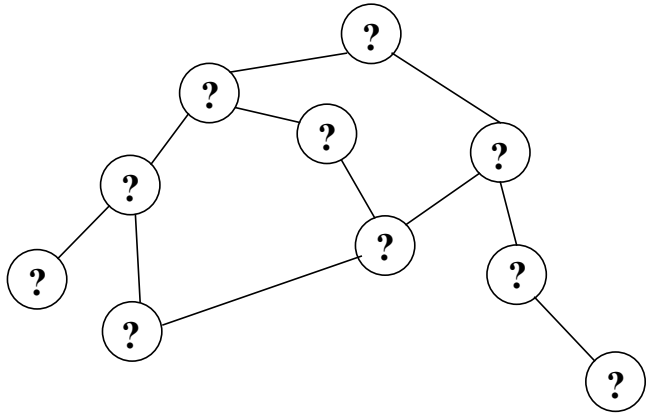
Denn sonst: Konstruiere den Spannbaum effizienter und löse mit zusätzlichen O(n) Nachrichten das Election-Problem!

→ Der genannte GHS-Algorithmus ist grössenordnungsmässig optimal!

Anonyme Netze

- Keine Knotenidentitäten
  - bzw.: alle (oder mehrere) *identische* Identitäten
  - bzw.: ggf. vorhandene Knotenidentitäten werden nicht benutzt

- Frage: Was geht dann noch? (Insbes. Symmetriebrechung!?)



- Es gilt: Falls Election in anonymen Netzen geht, dann können die Knoten individuelle Namen bekommen

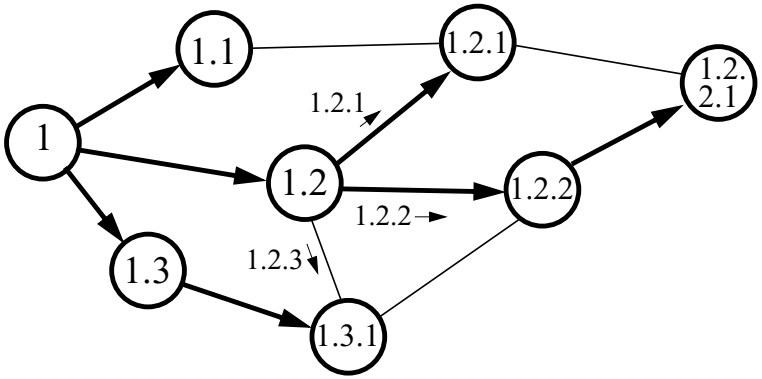
...und *alles* geht wie gehabt!

- Der Satz lässt vermuten, dass Election in anonymen Netzen *nicht* geht, sonst wäre Anonymität kein *grundsätzliches* Problem!

De-Anonymisierung

Z.B.: Der Leader flutet das Netz mit verschieden benannten Nachrichten und jeder Knoten übernimmt die Identität der ersten Nachricht , die ihn erreicht - dazu numeriert ein Knoten seine Kanäle bzw. Nachrichten durch und konkateniert seine eigene Identität zu dieser Nummer

⇒ Alle Nachrichten und damit alle Knoten heissen verschieden!



- Einziger (!) Initiator gibt sich selbst einen Namen “1”

- Jeder Prozess numeriert seine Ausgangskanäle 1,...,k

- Jede von Prozess X über Kanal j versendete Nachricht bekommt zusätzlich den Namen “X.j” dazugepackt

- Ein (noch) anonymer Prozess nimmt den Namen der ersten Nachricht als seinen Namen

Fragen: - wann ist das Verfahren beendet?
- wie erfährt der Initiator dies?

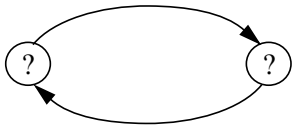
Election in anonymen Netzen?

- In anonymen Netzen geht manches (z.B. Election?) nicht mehr mit deterministischen Algorithmen
  → randomisierte Verfahren helfen gelegentlich!

- Manches geht noch, wenn wenigsten die Knotenzahl bekannt ist (aber auch das hilft nicht immer!)

Satz: *Es gibt keinen stets terminierenden Election-Algorithmus für anonymen Ringe*

selbst wenn die Ringgrösse den Knoten bekannt ist



- hier für Ringgrösse 2
- jeder Knoten befindet sich (bzgl. des Election-Algorithmus) in einem bestimmten Zustand z

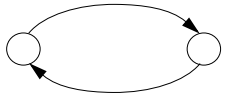
Bew.:
- Betrachte *Konfigurationen* (hier Quadrupel aus den Zuständen der beiden Knoten und Kanäle)
- Kanalzustand = Nachrichten, die unterwegs sind
- Anfangkonfiguration des Algorithmus ist *symmetrisch*: (z,z,∅,∅), wegen Anonymität
- Alle lokalen Algorithmen sind definitionsgemäss identisch --> Knoten können sich jeweils gleich (quasi "zum gleichen Zeitpunkt") verhalten
- Konfigurationsfolge kann daher aus lauter symmetrischen Konfigurationen bestehen: (z,z,∅,∅) --> (z',z',k,k) --> ... --> etc.
- Falls die Folge endlich ist, könnte der Endzustand symmetrisch sein --> keine Symmetriebrechung möglich!

Ein probabilistischer Election-Algorithmus

```
state := undecided;
while state = undecided do
{ mine := random(0,1);
  send <mine> to neighbor;
  receive <his>;
  if (mine,his) = (1,0) then state := win;
  if (mine,his) = (0,1) then state := lose;
}
```

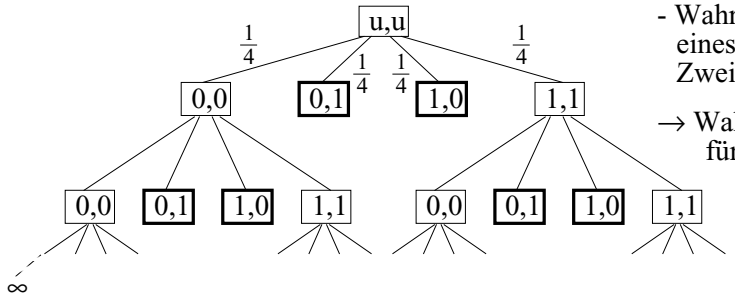
zufälliges Ergebnis 0 oder 1

- hier: *anonyme* Ringe der Grösse 2



- jeder Knoten führt den gleichen nebenstehenden Algorithmus aus
- Verallgemeinerung auf grössere Ringe?

- Geht es nicht auch mit einem *deterministischen* Algorithmus?
- Beachte: *"korrekt" ≠ "korrekt mit Wahrscheinlichkeit 1"*!
  - "korrekt" heisst: Algorithmus *hält stets* und liefert richtiges Ergebnis
  - obiger Algorithmus ist aber (in diesem Sinne) *nicht korrekt*, da es nicht terminierende Konfigurationsfolgen wie etwa
    - (0,0) → (0,0) → (0,0) → (0,0) → (0,0) → (0,0) .. . oder
    - (0,0) → (1,1) → (0,0) → (1,1) → (0,0) → (1,1)... etc. gibt!
  - alle diese Folgen haben aber die Dichte 0 (wenn "random" gut genug ist...)
    ⇒ Algorithmus terminiert mit Wahrscheinlichkeit 1
    ⇒ Algorithmus ist "korrekt mit Wahrscheinlichkeit 1"!



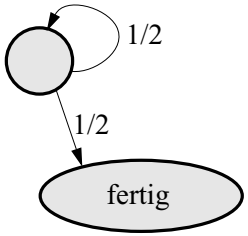
- Wahrscheinlichkeit eines unendlichen Zweiges = 0

→ Wahrscheinlichkeit für leader = 1

Mittlere Nachrichtenkomplexität?

- Beachte: Keine Schranke für *worst-case* Komplexität!

- Die mittlere ("erwartete") Nachrichtenkomplexität lässt sich mittels *Markow-Ketten* leicht ermitteln

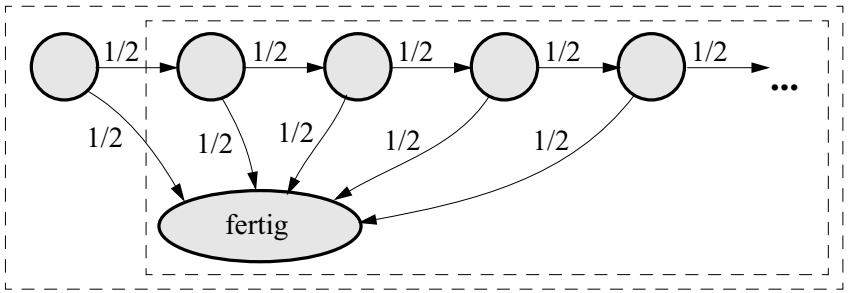


- wie hoch ist die erwartete Weglänge W, wenn mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten (hier jeweils 1/2) zum Folgezustand verzweigt wird?

- ist dieser Ansatz (gewichtete Summe) korrekt?

$$1\,\frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{4} + 3\,\frac{1}{8} + 4\,\frac{1}{16} + \ldots + \quad = ?$$

- Durch "Aufbröseln" der Schleife ergibt sich diese Darstellung:



- hier ist man mit Wahrscheinlichkeit 1/2 nach einem Schritt fertig, oder es liegt (nach einem Schritt) wieder die gleiche Situation vor!

- daraus ergibt sich der *Rekursionsansatz* $W = 1/2 + 1/2\,(1+W)$

- dies liefert $\underline{W=2}$ als Lösung

- Bem.: Hinweise zur Varianz etc. findet man in entsprechenden Mathematik-Lehrbüchern