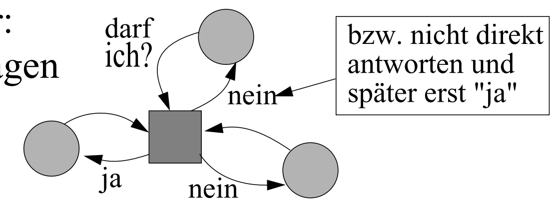
Wechselseitiger Ausschluss

Wechselseitiger Ausschluss: Request- (bzw. Permission)-basierte Prinzipien

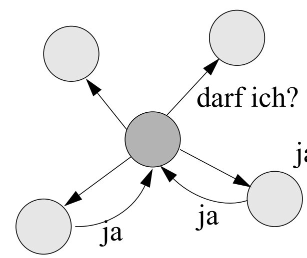
1) Zentraler Monitor:
Einen einzigen fragen

- Engpass, schlecht skalierbar, nicht fehlertolerant



2) *Alle* fragen

- dezentral und symmetrisch, aber viele Nachrichten
- Algorithmen von Lamport (1978) und Ricart / Agrawala (1981) --> Vorlesung "Verteilte Systeme"



3) Kompromiss: dezentrale, symmetrische Lösung, bei der nur *einige* Prozesse um Erlaubnis gefragt werden?

- es müssen natürlich "ausreichend viele" sein

- Lassen sich Schemata als Ausprägung eines gemeinsamen allgemeinen Prinzips verstehen?

--> "ein für alle mal" verifizieren
--> abstraktere Sicht liefert hoffentlich tieferes Verständnis
--> ggf. neue Varianten mit interessanten Eigenschaften

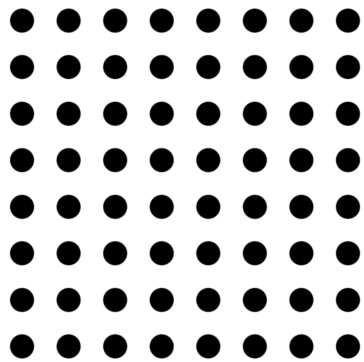
Siehe dazu Artikel von B. Sanders (ACM TOCS 5, 284-299, ’87)

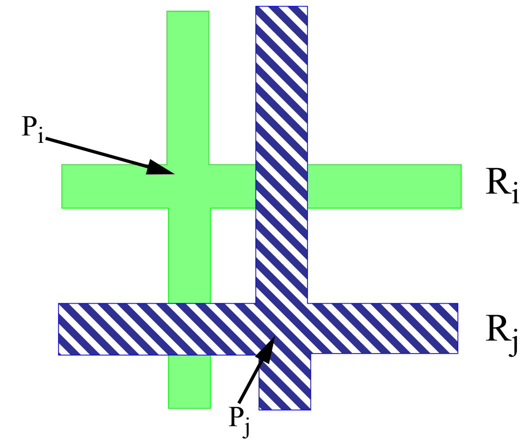
Maekawa's $\sqrt{n}$ -Algorithmus (1985)

"... the algorithm is optimal in terms of the number of messages..."

Idee *in etwa:*

- Anordnung der Prozesse in einem $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ - Gitter

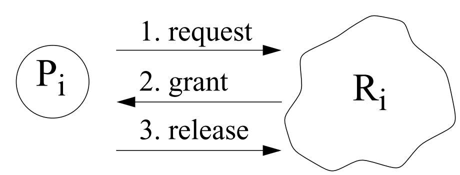




- Prozess P_i hat eine Menge von Prozessen R_i, die er (mit request-Nachrichten) *um Erlaubnis fragen* muss
  - hier symbolisiert durch Prozesse in der Spalte / Zeile von P_i

- Die "request-granting" Mengen für je zwei Prozesse *überschneiden* sich garantiert! ($\forall i,j$: $R_i \cap R_j \neq \emptyset$)

- Grundidee:

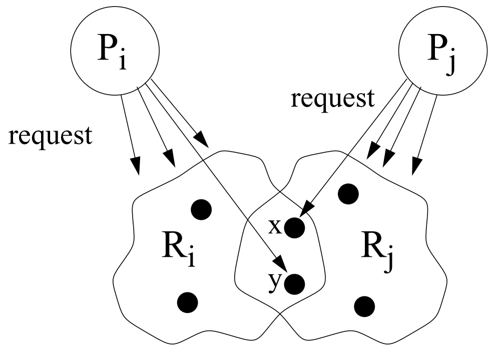


Ein Prozess wartet auf "grant" seiner Menge. Erst dann darf er den kritischen Abschnitt betreten. Nach Verlassen Menge mit "release" informieren.

Eine Erlaubnis ("grant") wird zu einem Zeitpunkt nur *einem* Bewerber erteilt.

- Nachrichtenkomplexität: $3\,|R_i|$
  --> minimale Mächtigkeit der R_i?

Deadlock-Problematik



Beachte: Zweckmässigerweise ist oft $P_k \in R_k$, falls dies möglich ist.

Im Szenario könnte dann z.B. $x = P_j$ und $y = P_i$ sein.

- y antwortet P_i mit "grant", nicht jedoch P_j
- x antwortet P_j mit "grant", nicht jedoch P_i

==> *Deadlock*, P_i und P_j warten auf weitere Zusage!

Lösung erfordert weitere Nachrichtentypen zur Deadlockvermeidung (bzw. Deadlockbehebung --> Symmetriebrechung)

==> soll hier nicht behandelt werden (--> Literatur)

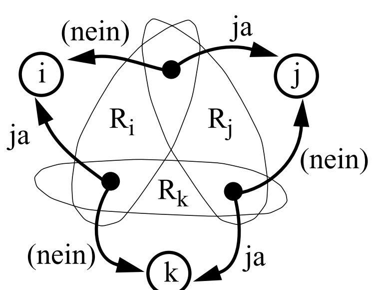
==> erhöht die Nachrichtenkomplexität jedoch nur um konstanten Faktor

---

Ist auch ein Deadlock möglich, wenn $|R_i \cap R_j| = 1$ für alle i,j ?

Ja, siehe nebenstehendes Szenario!

- Prozese i,j und k wenden sich gleichzeitig an ihre entsprechenden Mengen
- jeweils ein Prozess daraus antwortet mit "ja"



Gitteranordnung ist nicht optimal

- Zu jedem Paar von Prozessen P_i, P_j sind mindestens *zwei* Elemente im Schnitt von R_i, R_j (statt minimal einem)

- " Minimale" R_i können mit Hilfsmitteln der *projektiven Geometrie* bestimmt werden (--> $|R_i| \approx \sqrt{n}$ statt $2\sqrt{n}$ -1)

  - *Endliche projektive Ebene* entsteht aus affiner Ebene unter Hinzunahme von "uneigentlichen Punkten" (=Parallelenbündel) und uneigentlichen Geraden (=Menge aller u. Punkte) und erfüllt folgende 3 Axiome:
    - zu je zwei Punkten gehört genau eine damit inzidente Gerade
    - zu je zwei Geraden gehört genau ein gemeinsamer Punkt
    - es gibt 4 Geraden, wovon keine 3 durch den selben Punkt gehen

  - Für eine *endliche projektive Ebene der Ordnung k* gilt:
    - jede Gerade enthält k Punkte
    - jeder Punkt liegt auf k Geraden

    } typischer *Dualismus* der projektiven Geometrie!
    - Ebene hat k(k-1)+1 Punkte und ebensoviele Geraden

  - *Idee*: Punkte ⇔ Prozesse, Geraden ⇔ request-granting-Mengen R_i.

    n = k(k-1)+1 --> Jede Menge enthält $O(\sqrt{n})$ Elemente

  - *Leider* existiert nicht für jedes k eine endliche projektive Ebene der Ordnung k (mindestens jedoch dann, wenn k eine Primzahlpotenz ist); 1988 gezeigt (3000 Stunden Rechenzeit, erschöpfende Suche): es gibt keine projektive Ebene der Ordnung 10

Beispiel n=13, k=4:

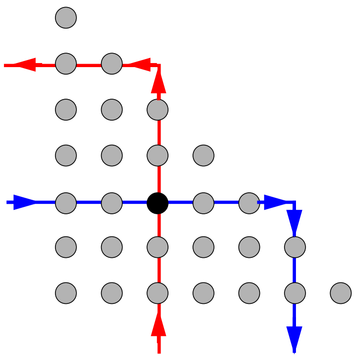
(Überprüfe, ob $|R_i \cap R_j| = 1$)

Beachte: Umnumerierung, so dass $i \in R_i$ (für alle i) ist möglich und zweckmässig!

R_1 = {1, 2, 3, 4}
R_2 = {1, 5, 6, 7}
R_3 = {1, 8, 9, 10}
R_4 = {1, 11, 12, 13}
R_5 = {2, 5, 8, 11}
R_6 = {2, 6, 9, 12}
R_7 = {2, 7, 10, 13}
R_8 = {3, 5, 10, 12}
R_9 = {3, 6, 8, 13}
R_{10} = {3, 7, 9, 11}
R_{11} = {4, 5, 9, 13}
R_{12} = {4, 6, 10, 11}
R_{13} = {4, 7, 8, 12}

Eine $\sqrt{2}\sqrt{n}$ Request-granting-Menge

- Prozesse werden *dreiecksförmig* angeordnet:

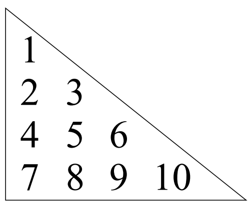


Schema 1 für R_i: Nimm alle Prozesse der *Zeile* von P_i sowie alle Prozesse derjenigen *Spalte*, die eins weiter rechts liegt als der rechteste Prozess der Zeile

Schema 2 für R_i: Nimm alle Prozesse der *Spalte* von P_i sowie alle Prozesse derjenigen *Zeile*, die eins weiter oben liegt als der oberste Prozess der Spalte

- Für beide Schemata gilt jeweils: Je zwei solche Mengen schneiden sich an mindestens einer Stelle (wieso?)

- Beispiel:



Mächtigkeit der R_i: ca. $\sqrt{2}\sqrt{n}$ (wieso?)

Schema 1	Schema 2
R_1 = {1, 3, 5, 8}	R'_1 = {1, 2, 4, 7}
R_2 = {2, 3, 6, 9}	R'_2 = {1, 2, 4, 7}
R_3 = {2, 3, 6, 9}	R'_3 = {1, 3, 5, 8}
R_4 = {4, 5, 6, 10}	R'_4 = {1, 2, 4, 7}
R_5 = {4, 5, 6, 10}	R'_5 = {1, 3, 5, 8}
R_6 = {4, 5, 6, 10}	R'_6 = {2, 3, 6, 9}
R_7 = {7, 8, 9, 10}	R'_7 = {1, 2, 4, 7}
R_8 = {7, 8, 9, 10}	R'_8 = {1, 3, 5, 8}
R_9 = {7, 8, 9, 10}	R'_9 = {2, 3, 6, 9}
R_{10} = {7, 8, 9, 10}	R'_{10} = {4, 5, 6, 10}

- Schema 1 und 2 sind jeweils für sich unausgewogen: Prozess 10 bzw. 1 kommt viel häufiger als andere vor
    - aber: jede Zahl kommt genau 8 mal in *allen* Mengen vor (Lastsymmetrie!) (Denkübung: Beweis, dass *stets* alle gleich oft vorkommen)
    - Vorschlag: "alternierende" Benutzung der beiden Schemata (wie?) Frage: Überschneiden sich R_i (Schema 1) und R'_j (Schema 2) jeweils?

Mehr dazu (und weitere Verfahren) siehe: Luk, Wong, "Two New Quorum Based Algorithms for Distributed Mutual Exclusion", Proc. 17th Int. Conf. Distributed Computing Systems, 1997, pp. 100-106

Man kann zeigen:
$|R_i| = O(\sqrt{n})$ ist optimal
(für "symmetrische" Lösungen).

Wir lassen das hier aber weg.