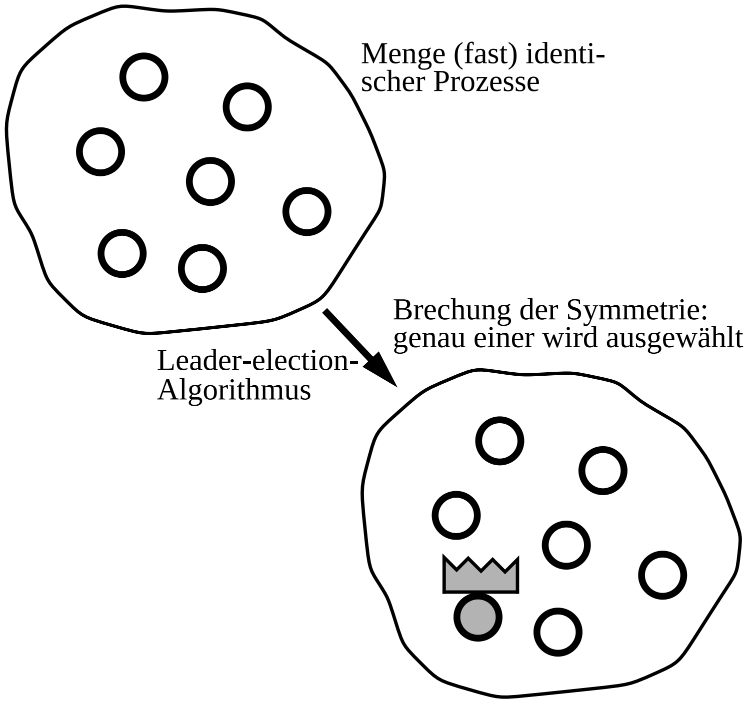
Das Election-Problem

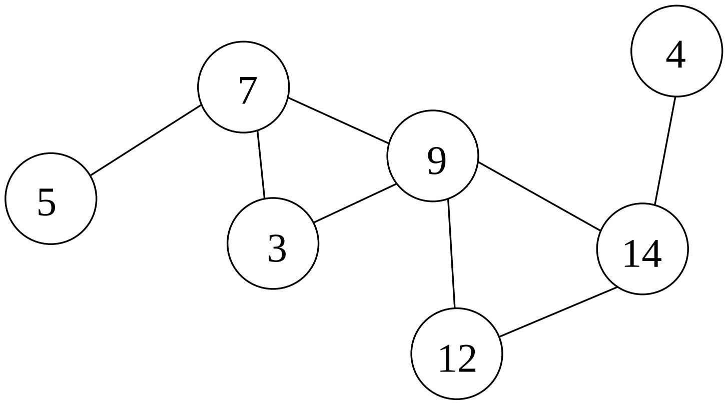


Anwendung z.B.:

- Monitorstation bei Token-Ring-LANs festlegen
- Generierung eines eindeutigen Tokens
- "Root bridge" für Spannbaum bei Ethernet-LANs
- "Symmetrisierung" anderer Algorithmen
  (Verwendung als vorgeschalteter Basisalgorithmus)

Election mit "message extinction"

- Alle Knoten haben unterschiedliche Nummern > 0
- Verteilter, symmetrischer Algorithmus zur Bestimmung der grössten Identität
- Jeder Knoten soll schliesslich grössten kennen
- Jeder Knoten darf unabhängig (gleichzeitig) den Algorithmus initiieren
- Schema der verteilten Approximation anwenden



Fragen:

- Anzahl der Nachrichten?
- Terminierung?
- Bessere Algorithmen für gleiches Problem?
- Spezielle Topologien (Ring, Baum)...?

Der Election-Algorithmus

- Nachrichtengesteuerte Spezifikation des Algorithmus ("*message driven*")

- *Atomare Aktionen* ← vereinfacht u.a. auch die Verifikation

- Jeder Prozess mit Identität *p* hat lokale Variable M_p

- M_p ist initial 0; am Ende enthält M_p die Identität des Masters ("leader")

Name der Aktion

assertion

Alle Prozesse verhalten sich gleich ("syntaktische Symmetrie")

I_p: $\{M_p = 0\}$
  $M_p := p$;
  send $\langle M_p \rangle$ **to** all neighbours

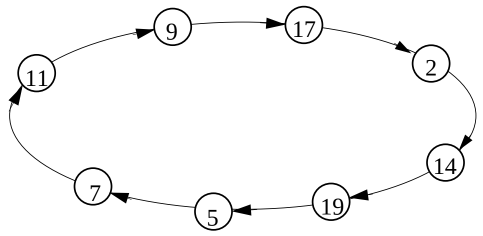
R_p: {Eine Nachricht $\langle j \rangle$ ist eingetroffen}
  if $M_p < j$ **then**
    $M_p := j$;
    send $\langle M_p \rangle$ **to** all neighbours
  fi

?

T_p: {Terminierung wurde entdeckt}
  if $M_p = p$ **then** *"I am the master"* **fi**

andernfalls ist p der master

Leader-Election auf einem Ring



- Voraussetzung hier: unidirektionaler Ring, wobei alle Identitäten verschieden sind

1. Idee: - Jeder Prozess wacht irgendwann auf (spätestens, wenn er eine Nachricht von einem anderen erhält)

"Bully-Algorithmus"

- Startet vollständigen Ringumlauf

- Meldet, ob unterwegs einen grösseren getroffen

==> n^2 Einzelnachrichten (n = Anzahl der Prozesse)

---

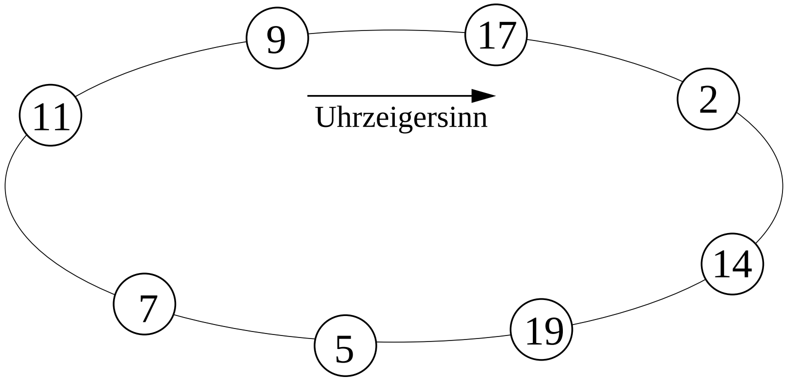
2. Idee: Message-extinction anwenden!

I_p: $\{M_p = 0\}$
  $M_p := p$;
  send $\langle M_p \rangle$ **to** next

R_p: {Eine Nachricht $\langle j \rangle$ ist eingetroffen}
  if $M_p < j$ **then**
    $M_p := j$;
    send $\langle M_p \rangle$ **to** next
  fi
  if $j = p$ **then** *"I am the master"* **fi**

Election: Nachrichtenkomplexität

- Message-extinction-Prinzip von Chang und Roberts 1979
  - war einer der ersten verteilten Algorithmen



- *Worst-case Nachrichtenkomplexität* bei k Startern:
  $n + (n-1) + (n-2) + ... + (n-k+1) =$ **$nk - k(k-1)/2$**

  --> $O(n^2)$ bei Ringgrösse n und k=n

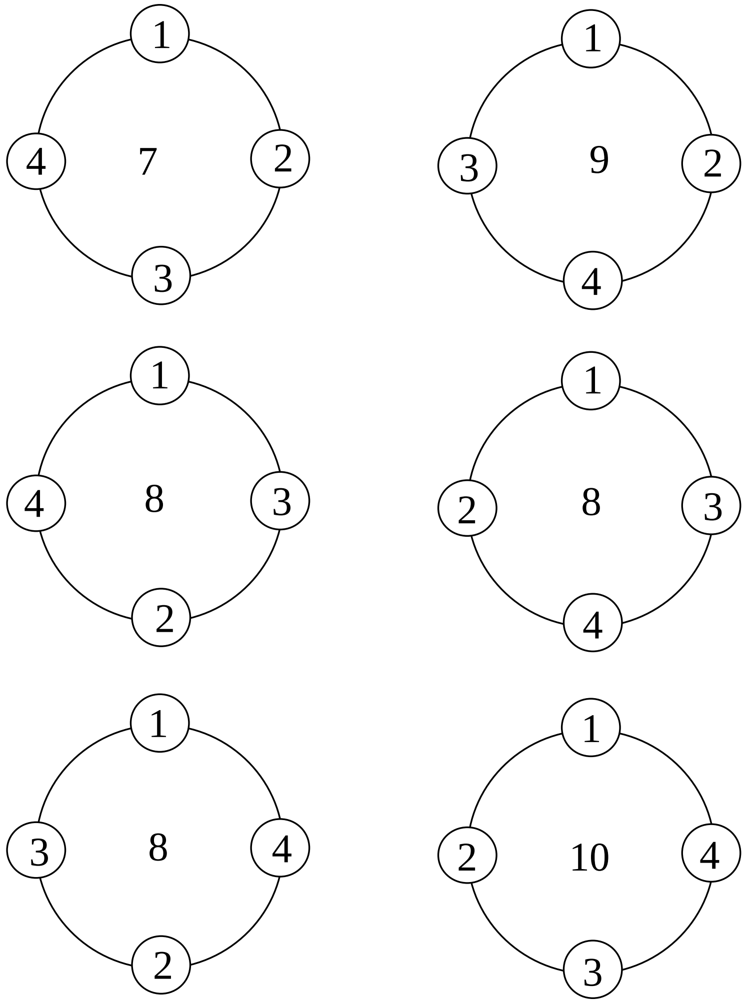
- Wie hoch ist die *mittlere* Nachrichtenkomplexität?
  - bei "zufälliger" Permutation der Identitäten

- Wie hoch ist die *Zeitkomplexität*?
  - wenn alle gleichzeitig starten?
  - beim zeitversetzten Starten?

Jede Nachricht benötige eine Zeiteinheit ("Einheitszeitmodell")

Mittlere Nachrichtenkomplexität (1)

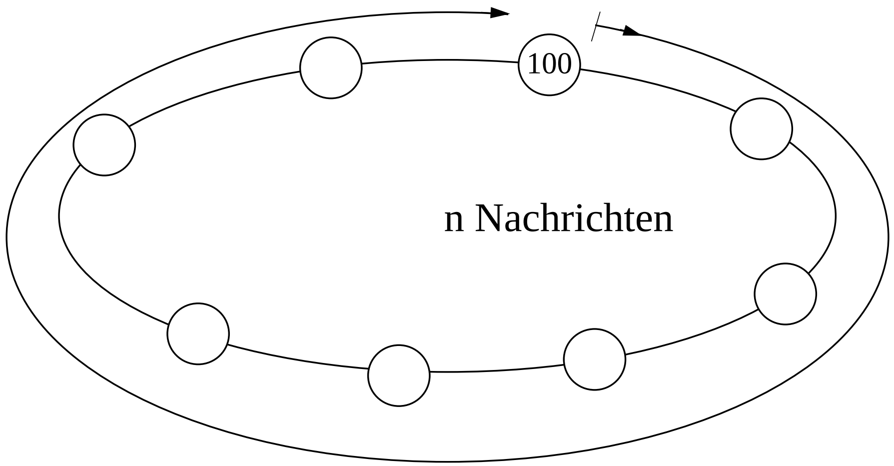
- Beispiel: Sei k = n = 4
- Über alle Permutationen mitteln (wieviele?)

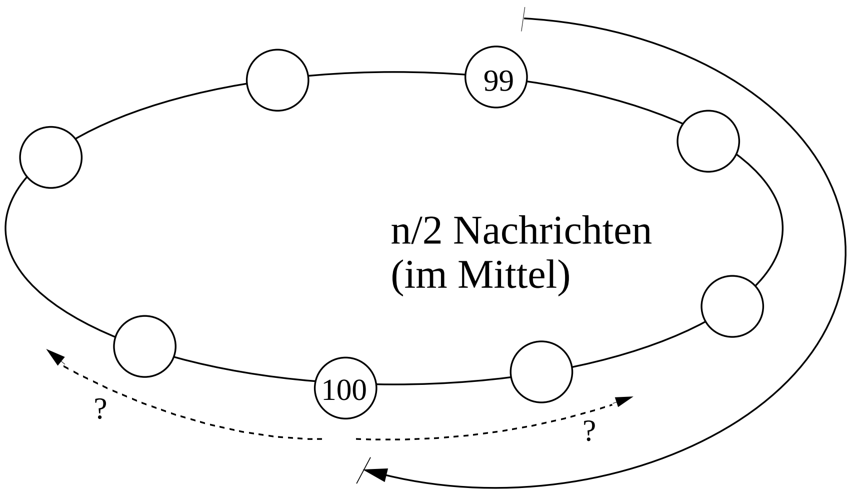


50/6 = 8.333... Nachrichten im Mittel

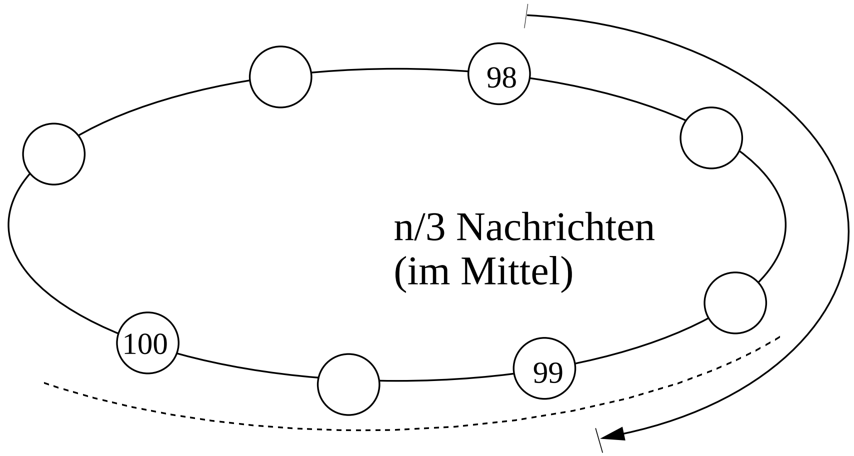
Mittlere Nachrichtenkomplexität (2)

Sei n = 100; id = 1, 2, ..., 100





Mittlere Nachrichtenkomplexität (3)



Vermutung: Drittgrösster sollte im Mittel nach n/3 Schritten auf einen grösseren Prozess (99 oder 100) treffen

- Lässt sich durch explizites Nachrechnen aller ca. n^2 Fälle auch beweisen...

- Allgemeiner Beweis für die Vermutung "n/i Schritte beim i-t grössten"?

Mittlere Nachrichtenkomplexität (4)

- Grösste Identität: n Nachrichten (immer)
- Zweitgrösste: im Mittel n/2
- Drittgrösste: im Mittel n/3 ??

  ...

- i-t grösster: im Mittel n/i stimmt das?

Wenn das stimmt --> einfach aufaddieren?

$$\frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \ldots + \frac{n}{k} = n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = n\, H_k$$

Def. der sogenannten *harmonischen Reihe*

Was ergibt sich für n = k = 4 ?

$$4\ \frac{12+6+4+3}{12} = 25/3 = 8.333...$$

Stimmt mit früherem Wert überein!
==> *Vermutung*: n H_k ist korrekt

- Man kann tatsächlich exakt zeigen:

  Die mittlere Nachrichtenkomplexität beträgt

$$n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = n\, H_k \approx \mathbf{n \ln k}$$

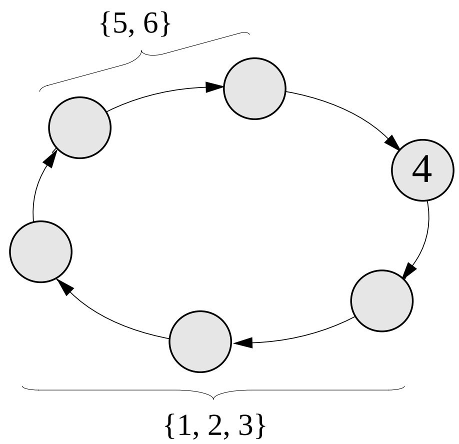
Wir wollen dies gleich genauer herleiten...

Unabhängige Fälle?

Im allgemeinen sind die "Zufallsvariablen", die die Länge der von Prozess i initiierten Nachrichtenkette repräsentieren, nicht unabhängig voneinander!

Beispiel: Gegeben 6 Prozesse 1, 2, ... 6 im Ring. Sei *A* das Zufallsereignis "Nachrichtenkette von Prozess 4 hat die Länge 4" und *B* das Zufallsereignis "Nachrichten-kette von Prozess 5 hat die Länge 2"

Aus *A* folgt nebenstehende Situation; dann kann die von 5 initiierte Nachrichtenkette jedoch nur die Länge 1 oder 5 haben, nicht jedoch 2, wie von *B* gefordert



==> prob($A \cap B$) = 0, obwohl prob(A) $\times$ prob(B) $\neq$ 0

==> A und B sind *nicht unabhängig* voneinander!

Allerdings (hier ohne Rechtfertigung):

- die Zufallsvariablen in obigem Beispiel sind *paarweise unkorreliert*
- *Erwartungswerte* (d.h. die mittleren Längen der Nachrichtenketten) dürfen daher *aufaddiert* werden, um den Mittelwert bzgl. der Gesamtnachrichtenzahl zu erhalten (in "Formeln": E(X+Y) = E(X) + E(Y))

Die harmonische Reihe Hn ...

Beh.: Hn divergiert

Bew.: Fasse 4 Reihenglieder ab 1/4 zusammen,
(jew. grösser als 1/8), 8 Reihenglieder ab 1/8...

Beh. (o. Bew.) $\sum_i \frac{1}{i^r}$ konvergiert gdw. r > 1

(r = 2 --> $\pi^2/6$ ... Riemann'sche Zeta-Funktion)

==> Harmonische Reihe "divergiert gerade noch"

Beh. (o.Bew.) $\gamma = \lim_{n \to \infty} (H_n - \ln n) = 0.5772156649...$

Euler'sche Konstante

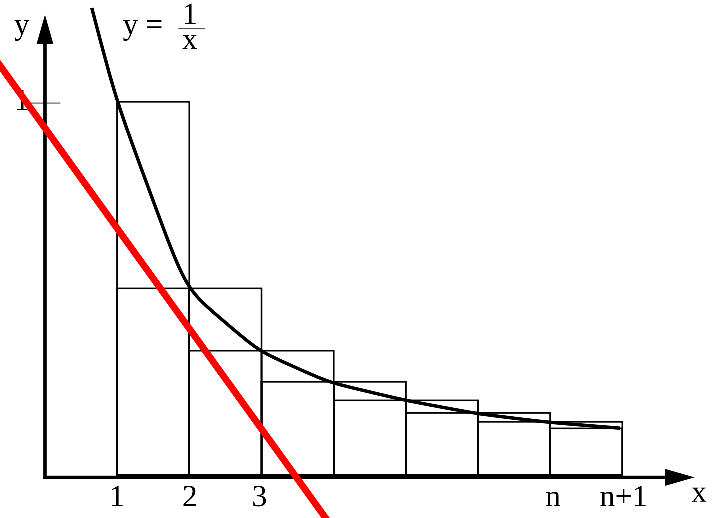
==> Hn lässt sich zumindest für grosse n durch ln n abschätzen

- diese Abschätzung lässt sich sogar noch präzisieren...

Abschätzung der harmonischen Reihe Hn

Beh.: $\underline{\underline{\ln n < H_n < 1 + \ln n}}$

Bew.:



- *Fläche der Obertreppe* von 1 bis n+1: H_n

- *Fläche unter Kurve* von 1 bis n+1: $\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1)$

(wg. ln(1) = 0)

==> $H_n > \ln(n+1)$ ==> $\underline{\underline{H_n > \ln n}}$

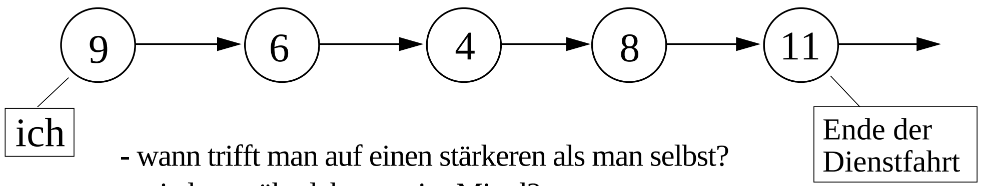
- *Fläche der Untertreppe* von 1 bis n: H_n-1

- *Fläche unter Kurve* von 1 bis n: $\int_1^{n} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n)$

==> $H_n - 1 < \ln(n)$ ==> $\underline{\underline{H_n < 1 + \ln n}}$

Wartezeit bis zum ersten Rekord

- Wie weit kommt die von einem "x-beliebigen" Knoten initiierte Nachrichtenkette im Mittel?



- wann trifft man auf einen stärkeren als man selbst?
- wie lange überlebt man im Mittel?

In einem Teich schwimmen n Fische verschiedener Grösse - wieviele Fische muss man im Mittel noch fangen, bis man einen fängt, der grösser als der erste gefangene Fisch ist? (Oder bis der Teich leer ist)

Lösungsansatz (aber darf man wirklich so vorgehen?):

Fängt man den grössten zuerst --> n Fänge ("Pech", Teich wird leer)
Fängt man den zweitgrössten zuerst --> n/2 Fänge im Mittel
Fängt man den drittgrössten zuerst --> ...

Zurückführung auf ein bek. math. Modell: *Urnenmodell ohne Zurücklegen*

Z.B. n=100, 7.grösster Fisch initial:

--> 6 schwarze und 93 weisse Kugeln

--> Sei p die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen ("Treffer")

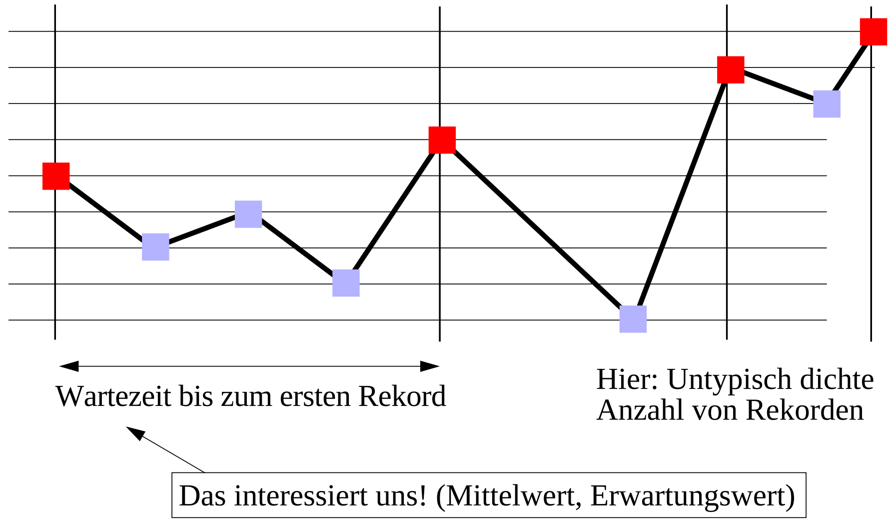
--> Beispiel: Wahrscheinlichkeit, eine weisse und dann eine schwarze zu ziehen (d.h. genau die Entfernung 2 zu schaffen): (1-p) mal Wahrscheinlichkeit für "Treffer bei 6 schwarzen und 92 weissen"

--> ... alles gewichtet aufsummieren... (aufwendig!)

Warten auf einen neuen Rekord...

- Rekord = grösserer Wert als alle vorangehenden
- "left to right maxima" (einer Zahlenfolge)

- Z.B. "heissester August seit Anfang des Jahrhunderts"



- Anwendung: z.B. Verlobungshäufigkeit bei deletion-sort

Festhalten und weitersuchen

Rekorde ...werden immer seltener

- Wieviele Rekorde gibt es eigentlich?
  - z.B. heissester August in einem Jahrhundert...
  - Annahme: keine Korrelation (d.h. zufällige Permutation vorausgesetzt)

- Betrachte Bitfolge: i-te Stelle 1 gdw. i-ter Wert ein Rekord

Bsp: 1001011000000100000000000100000000000000001

(Rekorde traten im 1., 4., 6., 7., 14.,... Jahr auf)

- Wieviele 1en bei gegebener Länge n?

Antwort:
- damit i-tes Bit auf 1 steht, muss der i-te Zahlenwert der Folge ≥ alle ersten i Zahlenwerte sein
- Wahrscheinlichkeit dafür ist 1 / i (stimmt's? wieso?)

--> Mittlere Anzahl von 1en = 1 + 1/2 + 1/3 +...

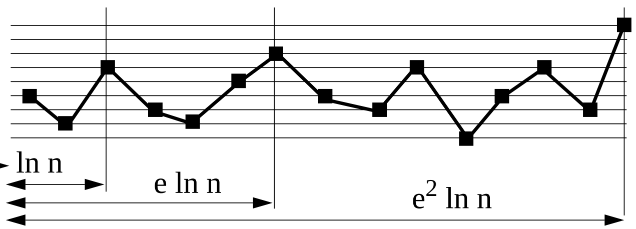
- darf man wirklich einfach so aufaddieren?

--> Mittlere Anzahl von Rekorden ist $\underline{\underline{H_n \approx \ln n}}$

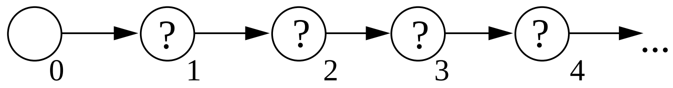
- Bsp: es gibt ca. 5 heisseste Auguste im Jahrhundert ... und wieviele in einem Jahrtausend?

==> Für einen Rekord mehr (im Mittel) muss das Zeitintervall ca. e = 2.71828 mal länger sein

Das haben wir noch immer nicht wirklich bewiesen!



Verteilung der Lebensdauer



Zu jedem Zeitpunkt ein Schritt...

- Wahrscheinlichkeit, *genau* bis zur Position i zu gelangen (und dort besiegt zu werden)?

- p(Lebenszeit = i) = p(Lebenszeit ≥ i) - p(Lebenszeit > i)
  - Vgl.: 18% Studis ≥ 16. Semester; 13% Studis $\underbrace{\geq \text{17. Semester}}_{>\text{16. Semester}}$

    ==> 5% *im* 16. Semester

Wahrscheinlichkeit für "grösster unter den ersten i"

- Also: $p(\text{Lebenszeit} = i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i(i+1)}$ (für i<n)

- Aber: $p(\text{Lebenszeit} = n) = \frac{1}{n}$ ("erfolgreicher Durchmarsch")

Beispiel n=4:

gewichtete Summe = 25/12 --> 25/3 = 8.333... Nachrichten im Mittel (vgl. früheres Ergebnis!)

1	$\frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$	= 50%
2	$\frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$	= 16.7%
3	$\frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{12}$	= 8.3%
4	$\frac{1}{4}$	= 25%

100%

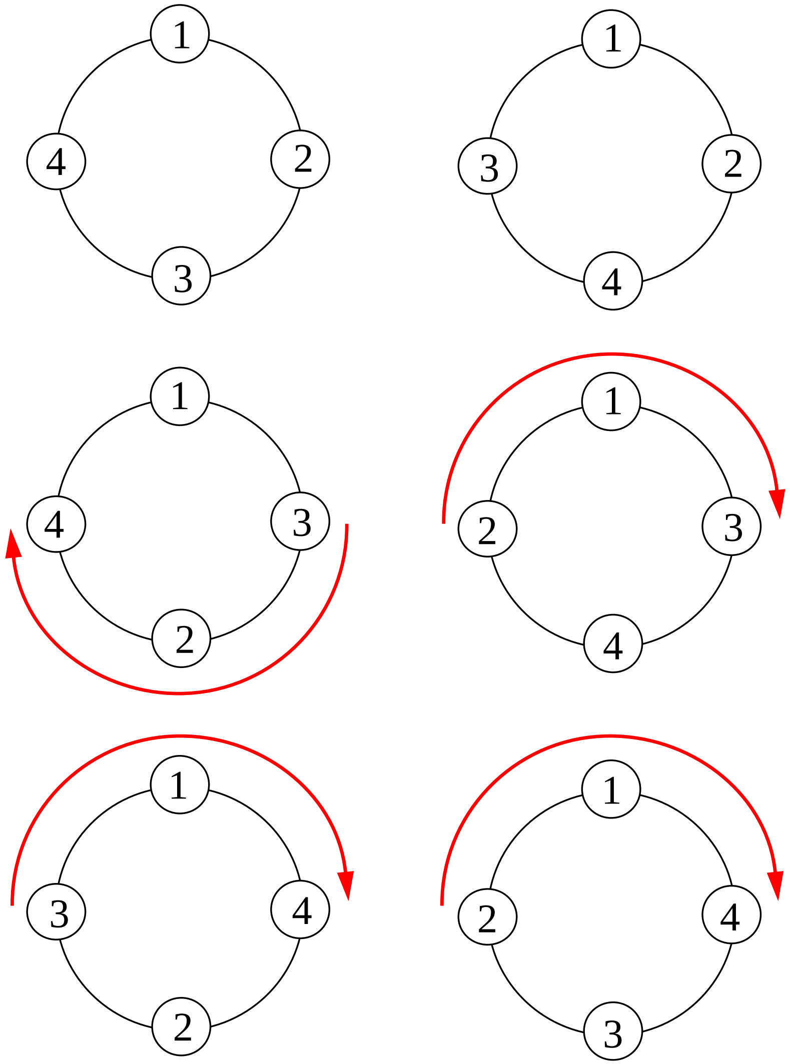
vgl. dazu nächstes Bild

Bem.: Es gilt

$$\frac{1}{n} + \sum_{i<n} \frac{1}{i(i+1)} = 1$$

(Induktionsbeweis als einfache Übung)

Lebensdauer 2 bei n=4



6 Bilder | jeweils 4 Starter

In 4 von $6 \times 4 = 24$ Situationen, also 1/6 aller Fälle (= 16.7%), wird für einen Initiator die Lebensdauer 2 exakt erreicht

Induktionsbeweis der Summenformel

Behauptung: $\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n}}$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1 \;\text{-->}\; 0 = 0$ ✓

$n = 2 \;\text{-->}\; \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ✓

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \overbrace{1 - \frac{1}{n}}^{\text{Ind. annahme}} + \frac{1}{n(n+1)}$$

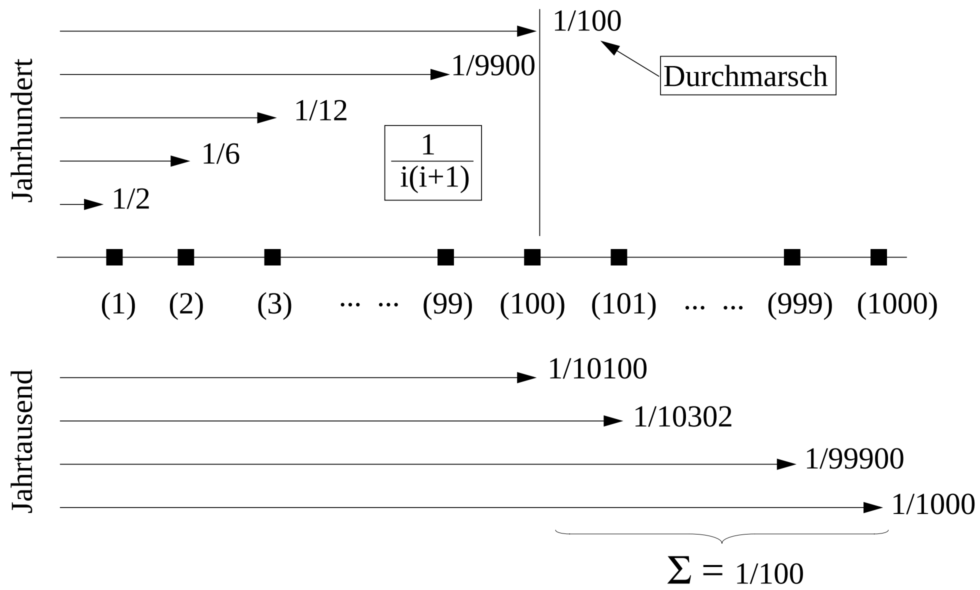
$$= 1 + \frac{-(n+1) + 1}{n(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{-n}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$ ✓

Rekord im Jahr i eines Jahrhunderts?

- Oder: Wahrscheinlichkeit, bei Position (i) "unterzugehen":



- "Durchmarsch" ist wahrscheinlicher, als an der Position davor "unterzugehen"

- Nur 50% Chance, über den ersten hinwegzukommen

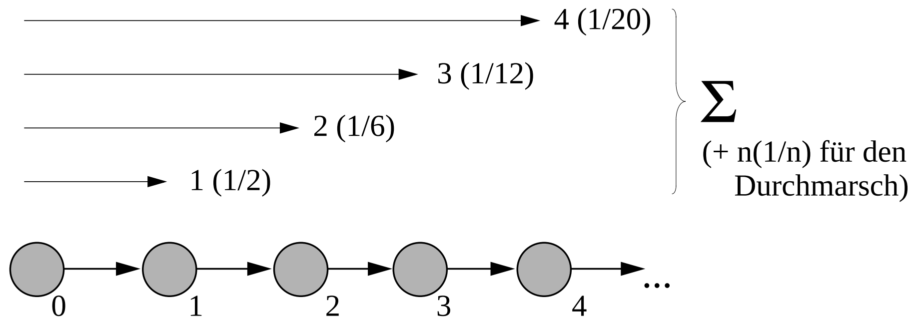
- p(*kein* echter Rekord in einem Jahrhundert) = 1/100,
- p(... in einem Jahrtausend) = 1/1000

Rekord würde jenseits liegen: Geht bei Jahrhundert "nur" mit einem Gewicht von 100 ein, statt mehrere hundert bei Jahrtausend

Nun also: Wartezeit bis zum ersten Rekord

- Gesucht: Die *mittlere* Lebensdauer

- Dazu: Wahrscheinlichkeit mit Weglänge gewichten und alle Einzelfälle aufsummieren



- Daraus folgt allgemein für den Erwartungswert:

$$n\,\frac{1}{n} + 1\,\frac{1}{1\times2} + 2\,\frac{1}{2\times3} + 3\,\frac{1}{3\times4} + \dots + (n-1)\,\frac{1}{(n-1)n} = \underline{\underline{H_n}}$$

Also: Eine von einem "x-beliebigen" Prozess initiierte Nachricht kommt im Mittel H_n weit

- darf man das nun mit n multiplizieren, da dies jeder Prozess tut?
- ja; aber generell Vorsicht bei solchen Überlegungen!

Damit haben wir also nH_n als mittl. Nachrichtenkomplexität!